Mathematisches Institut
der Universität Tübingen
Prof. Dr. F. Loose
F. Schmidt

SS 2011
08.06.2011
Blatt 9

Übungen zu „Differentialgeometrie II“

1. Seien M, N und P glatte Mannigfaltigkeiten und $\Phi : M \to N$ sowie $\Psi : N \to P$ glatte Abbildungen. Zeigen Sie für jede k-Form $\omega \in \mathcal{E}^k(P)$
$$(\Psi \circ \Phi)^*\omega = \Phi^*(\Psi^*\omega).$$

2. (a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und ω eine glatte (n-1)-Form auf U,
$$\omega = (-1)^i \eta_i dx^1 \wedge ... \wedge \widehat{dx^i} \wedge ... \wedge dx^n,$$
mit einem glatten $\eta = (\eta_1, ..., \eta_n) : U \to \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie: Ist $d\omega = f dx^1 \wedge ... \wedge dx^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ glatt, so ist $f = div(\eta)$.

   (b) Sei nun $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge. Zeigen Sie: Ist ω eine glatte 1-Form auf U, $\omega = \alpha_i dx^i$ und $d\omega = \eta_1 dx^2 \wedge dx^3 + \eta_2 dx^3 \wedge dx^1 + \eta_3 dx^1 \wedge dx^2$, so gilt für $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) : U \to \mathbb{R}^3$ und $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) : U \to \mathbb{R}^3$: $\eta = rot(\alpha)$.

3. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit der Dimension n und $0 \leq k \leq n$. Die *k-te de Rhamsche Cohomologiegruppe von M* ist der $\mathbb{R}$-Vektorraum
$$H^k(M;\mathbb{R}) := \frac{\ker\{d_k : \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M)\}}{\mathrm{im}\{d_{k-1} : \mathcal{E}^{k-1}(M) \to \mathcal{E}^k(M)\}}.$$
Zeigen Sie, dass M genau dann zusammenhängend ist, wenn $H^0(M;\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}$.

4. Sei M eine glatte Mannigfaltigkeit und $\mathcal{E}^*(M)$ ihre graduierte $\mathbb{R}$-Algebra der glatten Differentialformen. Zeigen Sie:

   (a) Ist $d : \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ eine Anti-Derivation, die auf Funktionen die Ableitung ist, so ist d bereits ein lokaler Operator. (Hinweis: benutze Abschneidefunktionen)

   (b) Es gibt genau eine Anti-Derivation $d : \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ vom Grad 1, die auf den Funktionen die Ableitung ist und $d^2 = 0$ erfüllt.

Abgabe: Mittwoch, 22. Juni 2011, 9 Uhr