Universitiät Tübingen, Mathematisches Institut
Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Sommersemester 2011

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 2 (Abgabe am 28.4.2010)

Aufgabe 6 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Berechnen Sie dazu zunächst die Lösungen der jeweiligen homogenen Gleichung. Eine partikuläre Lösung finden Sie dann entweder durch Raten oder durch Variation der Konstanten.

a) $y' - 4y = 3$ b) $y' - 4y = \mathrm{e}^{2x}$ c) $y' - 4y = 2x^2$ d) $y' - 2\sin(x)y = 6\sin(x)$

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y' - (\frac{2}{x} + 2)y = 0, \quad y(1) = 2$ b) $y' - \frac{\sin(x)}{y} = 0, \quad y(\frac{\pi}{2}) = -1$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ der folgenden Differentialgleichungen. Geben Sie in Teil a auch die Menge aller reellen Lösungen an.

a) $y'' - 4y' + 13y = 0$ b) $y'' + y' - 6y = 0$ c) $y'' - 8y' + 16y = 0$

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Lösen Sie die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $y'' - 4y' + 13y = 13x^2 + 5x + 1, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = \frac{46}{13}$
b) $y'' + y' - 6y = 5\mathrm{e}^{2x}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 5$
c) $y'' - 8y' + 16y = 30\sin(x) - 16\cos(x), \quad y(\pi) = 0, \quad y'(\pi) = -2$

Aufgabe 10 (10 Punkte)

Die Funktion

$$\Gamma(s) := \int_0^\infty t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

heißt Gammafunktion und ist für alle $s \in \mathbb{R}^+$ wohldefiniert. (Warum?) Zeigen Sie:

a) $\Gamma(n+1) = n! \quad \forall\, n \in \mathbb{N}_0$
Hinweis: Vollständige Induktion & partielle Integration.

b)
$$\frac{1}{x^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1}\,\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^+$$
Hinweis: Substitution.