

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 4 (Abgabe am 12.05.2011)

Aufgabe 16 (Fibonacci-Zahlen)

(10 Punkte)

Sei $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ und $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \forall n \geq 2$. Sei weiter

$$\vec{b}_n = \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n+1} \end{pmatrix}.$$

- Finden Sie eine 2×2 -Matrix A , so dass $\vec{b}_{n+1} = A \vec{b}_n$.
- Berechnen Sie A^n (durch HAT) und bestimmen Sie damit \vec{b}_n sowie a_n explizit.

Aufgabe 17

(10 Punkte)

Bestimmen Sie alle Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und führen Sie die HAT durch, d.h. geben Sie eine unitäre (bzw. orthogonale) Matrix U mit zugehöriger Diagonalmatrix $D = \overline{U}^T A U$ an.

Aufgabe 18

(10 Punkte)

Bringen Sie die quadratischen Formen in den folgenden Gleichungen auf Hauptachsen, geben Sie an, was für Kegelschnitte die Gleichungen beschreiben, und zeichnen Sie sie.

- $5x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 = 1$
- $\frac{1}{2}x_1^2 + 3^{\frac{3}{2}}x_1x_2 - \frac{5}{2}x_2^2 = \frac{1}{2}$
- $2x^2 + \sqrt{24}xy + 3y^2 = 5$
- $-6x^2 + 2\sqrt{3}xy - 4y^2 = 3$

Aufgabe 19

(10 Punkte)

- Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hermitesch mit Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Zeigen Sie: $\det A = \prod_{j=1}^n \lambda_j$.
- Gegeben sei die quadratische Form ($\vec{x} = (x, y, z)^T$)

$$q_A(\vec{x}) = x^2 + 10y^2 + z^2 - 4y(x+z) + 2axz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Für welche Werte von a ist q_A positiv definit? Welche Definitheitseigenschaften hat q_A für andere Werte von a ?