Universitiät Tübingen, Mathematisches Institut
Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler
Sommersemester 2011

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 5 (Abgabe am 19.05.2011)

Aufgabe 20 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & , \quad x^2+y^2>0 \\ 0 & , \quad x=y=0 \end{cases} .$$

a) Zeigen Sie: Die Funktion f ist stetig. (Hinweis: $|xy| \leq x^2+y^2$ (Warum?))
b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von f.
c) Berechnen Sie alle Richtungsableitungen von f in $\vec{0}$.
d) Ist f total differenzierbar? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 21 (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xy} + z^3 - xyz$.

a) Berechnen Sie alle ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f (d.h. f_x, f_y, f_z, f_{xx}, f_{xy}, f_{xz}, f_{yx}, f_{yy}, f_{yz}, f_{zx}, f_{zy} und f_{zz}. Ist f total differenzierbar?
b) Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\vec{x}_0 = (-1, 0, \pi)^T$ in Richtung von $(0, -1, 1)^T$.
c) Berechnen Sie $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} f(\vec{x}(t))$ für die Kurve $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$, $t \in [0, 2\pi]$.
Vergleichen Sie das Ergebnis an der Stelle $t = \pi$ mit dem Ergebnis aus Teil b.

Aufgabe 22 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$ für $\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} xy^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$ und die Wege

a) $\mathfrak{K}_3$: Die geradlinige Verbindung von $\binom{1}{0}$ nach $\binom{0}{1}$.
b) $\mathfrak{K}_1 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, und
c) $\mathfrak{K}_2 : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t^3) \\ \sin(t^3) \end{pmatrix}$, $t \in [0, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}]$

Geben Sie auch jeweils Anfangs- und Endpunkt des Integrationswegs an.
Ist f konservativ? Begründen Sie ihre Antwort.

Aufgabe 23 (10 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\, \mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} y\mathrm{e}^{xy} + 2x\cos(x^2+z^2) \\ x\mathrm{e}^{xy} \\ 2z\cos(x^2+z^2) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \sin^3(\frac{t}{4}) \\ \log(1+t) \\ \frac{t}{\sqrt{\pi}} \end{pmatrix} , \quad 0 \leq t \leq 2\pi .$$