

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 6 (Abgabe am 26.5.2011)

Aufgabe 24

(10 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ mit kartesischen Koordinaten x, y, z . Wir möchten uns die folgende Menge veranschaulichen,

$$T := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \left(1 - \sqrt{x^2 + y^2}\right)^2 + z^2 = \frac{1}{4} \right\}.$$

- Zeichnen Sie zunächst die Schnittmengen mit den drei Koordinatenebenen, z.B. ist $T_{xy} := \{\vec{x} \in T \mid z = 0\}$ die Schnittmenge mit der xy -Ebene.
- Zeichnen Sie nun $T \subset \mathbb{R}^3$.
- Erklären Sie kurz, wie Sie von den Ergebnissen in (a) zu der Zeichnung in (b) gelangt sind.

Aufgabe 25

(10 Punkte)

- Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x, y) = \frac{e^{2x}}{1-y^2}$ um $(0, 0)$.
- Bestimmen Sie die Taylorentwicklungen im Ursprung bis einschließlich des quadratischen Terms von $f(x, y) = \frac{e^{2x}}{1-y^2}$ und $g(x, y, z) = \cosh(y) + e^{2xy} + \sin(xyz)$.
- Bestimmen Sie die Taylorentwicklung um den Punkt $(0, -1, 1)$ von

$$f(x, y, z) = z^3 - 3z^2 + x^2 + 4yx + 2y + 4z - 4.$$

HINWEIS: Sie müssen nicht ableiten.

Aufgabe 26

(10 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte der Funktion

$$f(x, y) = (x^4 - x^2) \cos(y),$$

d.h. alle Punkte mit $\nabla f = 0$. Geben Sie an, ob dort Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 27

(10 Punkte)

Man nennt

$$\vec{y}' = A\vec{y}, \quad A \in \mathbb{C}^{n \times n},$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten. Dabei sind die Elemente von \vec{y} Funktionen von x , und \vec{y}' ist die komponentenweise Ableitung nach x , d.h.

$$\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{y}' = \frac{d\vec{y}}{dx} = \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix}.$$

- a) Zeigen Sie: Ist λ ein Eigenwert von A mit zugehörigem Eigenvektor \vec{u} , so ist

$$\vec{y}(x) = e^{\lambda x} \vec{u}$$

eine Lösung des DGL-Systems.

- b) Zeigen Sie: Jedes \vec{y} der Form

$$\vec{y}(x) = e^{Ax} \vec{b}, \quad \vec{b} \in \mathbb{C}^n \text{ beliebig,}$$

ist eine Lösung des DGL-Systems. Welchen Wert nimmt $\vec{y}(0)$ an?

- c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}' = A\vec{y}$, $\vec{y}(0) = (1 \ 0 \ 1 \ -1)^T$, mit A aus Aufgabe 17.