Universitiät Tübingen, Mathematisches Institut — Sommersemester 2011
Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 7 (Abgabe ausnahmsweise am **Mittwoch, 1.6.2010, vor 13:00,** in die vor C6P43 ausgelegten Mappen.)

Aufgabe 28 (10 Punkte)
Sei $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definiert durch $f(x,y)=xy$. Bestimmen Sie alle Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $(x-1)^2+y^2=4$.

Aufgabe 29 (10 Punkte)
Bestimmen Sie nach welchen Variablen die Gleichung $F(x_1,x_2,x_3)=0$ aufgelöst werden kann, so dass eine eindeutige Funktion f in einer Umgebung um $\vec{x}_0$ definiert wird. $\big($z.B. $f(x_3)=(x_1,x_2)^T\big)$. ~~Geben Sie weiterhin die Ableitung der gefundenen Funktion f am Punkt $(1,1,0)^T$ an.~~

a) $F_1(x_1,x_2,x_3)=(x_1-2)^3+(x_2+1)^2\mathrm{e}^{x_3}+x_3$ um den Punkt $\vec{x}_0=(2,-1,0)^T$

b) $\cancel{F_2(x_1,x_2,x_3)=\begin{pmatrix}(x_1-2)^3+2x_2\mathrm{e}^{x_3}\\(x_1-2)^2+\frac{1}{2}x_2^2\mathrm{e}^{x_3}\end{pmatrix}}$ ~~um den Punkt $\vec{x}_0=(2,1,0)^T$~~

Aufgabe 30 (10 Punkte)
Für welche $(r,\vartheta,\varphi)\in\mathbb{R}^3$ ist die Funktion

$$f(r,\vartheta,\varphi)=\begin{pmatrix}x(r,\vartheta,\varphi)\\y(r,\vartheta,\varphi)\\z(r,\vartheta,\varphi)\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}r\sin\vartheta\cos\varphi\\r\sin\vartheta\sin\varphi\\r\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

lokal umkehrbar?[1] Berechnen Sie auch $f^{-1\prime}(3,0,0)$.

Aufgabe 31 (10 Punkte)
Wenn Sie $\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$ als vektorwertigen Differentialoperator betrachten, können Sie auch Skalarprodukte und, im $\mathbb{R}^3$, das Kreuzprodukt bilden (vgl. Taylor).
Man definiert für $\vec{f}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$, $\vec{x}\mapsto(f_1(\vec{x}),\dots,f_n(\vec{x}))^T$ und $\vec{g}:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$,

$$\mathrm{div}\vec{f}=\nabla\cdot\vec{f}=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_j}\quad\text{(Divergenz)}\quad\text{und}\quad\mathrm{rot}\,\vec{g}=\nabla\times\vec{g}=\begin{pmatrix}\frac{\partial g_3}{\partial x_2}-\frac{\partial g_2}{\partial x_3}\\\frac{\partial g_1}{\partial x_3}-\frac{\partial g_3}{\partial x_1}\\\frac{\partial g_2}{\partial x_1}-\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\end{pmatrix}\quad\text{(Rotation)}$$

Berechnen Sie (wo möglich) $\mathrm{div}\vec{f}$, $\mathrm{rot}\vec{f}$, $\mathrm{grad}\,V$, $\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,V$ und $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,V$ für

$$\vec{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix}y\\x-z\\2z\,\mathrm{e}^{z^2}-y\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad V(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,.$$

---

[1] Das heißt wo existiert eine Funktion $f^{-1}(x,y,z)=\begin{pmatrix}r(x,y,z)\\\vartheta(x,y,z)\\\varphi(x,yz)\end{pmatrix}$.