Universitiät Tübingen, Mathematisches Institut — Sommersemester 2011
Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 10 (Abgabe am 30.6.2011)

Aufgabe 42 (10 Punkte)

Sei $\vec{f} : \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\} \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $\vec{x} \mapsto \dfrac{\vec{x}}{|\vec{x}|^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und sei K die Kugel mit Radius R.

a) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_{\partial K} \vec{f}\, d\vec{O}$ (ohne Verwendung eines Integralsatzes).

b) Berechnen Sie $\mathrm{div}\vec{f}$.

c) Bestimmen Sie $\displaystyle\int_K \mathrm{div}\vec{f}\,\mathrm{d}V$ für $\alpha < 3$.

d) Bilden Sie den Limes $\alpha \to 3$ für $\mathrm{div}\vec{f}$ und berechnen Sie damit das Integral aus c. Vergleichen Sie es mit dem Ergebnis aus a für $\alpha = 3$. Erklären Sie den scheinbaren Widerspruch.

Aufgabe 43 (10 Punkte)

Berechnen Sie $\displaystyle\oint_{\mathfrak{K}} \vec{v}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{v}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4y + \cos^2(x^2+z^2) \\ \log(2+y^2) + 5x \\ \tanh(x^2+y^2+z^2) \end{pmatrix};$$

dabei sei $\mathfrak{K}$ der im Uhrzeigersinn durchlaufene Einheitskreis in der xy-Ebene.

Aufgabe 44 (10 Punkte)

Bestimmen Sie jeweils den Fluss (von innen nach außen) der Vektorfelder $\vec{v}_1(\vec{x}) = (-y, x, 0)^T$ und $\vec{v}_2(\vec{x}) = \vec{x}$ durch die Oberfläche des Torus $\mathcal{T}$ aus den Aufgaben 24, 34 und 39.

Aufgabe 45 (10 Zusatzpunkte)

a) Für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definieren wir $\Delta f := \mathrm{div}\,\mathrm{grad}\, f$ (vgl. Aufgabe 31). Drücken Sie Δf durch partielle Ableitungen in kartesischen Koordinaten aus.

b) Zeigen Sie die folgende Integralformel:

$$\int_K (g\Delta f - f\Delta g)\, dV = \int_{\partial K} (g\nabla f - f\nabla g)\, d\vec{O}.$$

Dabei sind $f, g \in C^2(K)$ und $K \subset \mathbb{R}^3$ ist ein Körper (Gebiet) mit glattem Rand. Zeigt dabei $d\vec{O}$ nach innen oder nach außen?

Aufgabe 46 (10 Punkte)

a) Sei $\Omega = \{m, a, t, h\}$. Bestimmen Sie jeweils $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_j, \Omega)$ für $\mathcal{M}_1 = \{\{m\}\}$, $\mathcal{M}_2 = \{\{m\}, \{a\}\}$ und $\mathcal{M}_3 = \{A \in \mathcal{P}(\Omega) \text{ mit } |A| = 2\}$.

b) Sei $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{M}_1$ die Menge aller offenen Intervalle (a, b) aus $\mathbb{R}$ sowie
$\mathcal{M}_2$ die Menge aller abgeschlossenen Intervalle $[a, b]$ aus $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie: Die erzeugten σ-Algebren sind gleich[2], d.h. $\mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_1, \Omega) = \mathcal{A}^\sigma(\mathcal{M}_2, \Omega)$.

---

[2] Es handelt sich nämlich in beiden Fällen um die Borel-σ-Algebra über $\mathbb{R}$.