Universitiät Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2011
Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 11 (Abgabe am 07.07.2011)

Aufgabe 47 (10 Zusatzpunkte)

a) Nach dem Verpacken von sechs verschiedenen Geschenken kann Georg den Inhalt nicht mehr erkennen. Eines war für Klaus, zwei für Lothar und drei für Susanne. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei zufälliger Verteilung der Geschenke (in der richtigen Anzahl!) jeder die richtigen erhält?

b) Wir zeigen: Sind die Ereignisse A_j, $j = 1, \ldots, n$ paarweise unabhängig, d.h.

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)\, P(A_k) \quad \forall\, j \neq k$$

so folgt daraus **nicht** $P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_j)$.
Beispiel: Ein fairer Würfel werde zweimal geworfen. Wir betrachten die Ereignisse
A_1 = "der erste Wurf liefert eine gerade Zahl",
A_2 = "der zweite Wurf liefert eine ungerade Zahl" und
A_2 = "die Summe der beiden Augenzahlen ist gerade".
Berechnen Sie die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten.

Aufgabe 48 (10 Zusatzpunkte)

Eine Krankheit trete bei 1% der Bevölkerung auf (Prävalenz). Ein Labortest liefert bei 98% der Kranken ein positives Ergebnis (Sensitivität). Derselbe Test liefert bei 95% der Gesunden ein negatives Ergebnis (Spezifität). Wir möchten folgende Frage beantworten:

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit (einer zufällig getesteten Person), krank zu sein, wenn der Test positiv ist?

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Geben Sie wie beim Gefangenenparadoxon aus der Vorlesung eine geeignete Ergebnismenge Ω an.

Bezeichnen Sie mit A_1 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit hat, mit A_2 das Ereignis, dass die untersuchte Person die Krankheit nicht hat (also $A_2 = A_1^C$) und mit B das Ereignis, dass der Test positiv ausfällt.

b) Geben Sie alle Wahrscheinlichkeiten und alle bedingten Wahrscheinlichkeiten an, die sich unmittelbar aus dem Aufgabentext ergeben.

c) Bestimmen Sie die gesuchte Wahrscheinlichkeit mithilfe des Satzes von Bayes.

d) Geben Sie außerdem die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass der Test bei einer zufällig ausgewählten Person positiv ausfällt.

Aufgabe 49 (10 Zusatzpunkte)

Drei Schützen treffen sich zu einem Duell. Sie ordnen sich an den Ecken eines gleichseitigen Dreiecks an und vereinbaren die folgenden Regeln: Den ersten Schuss hat A, dann B, dann C, dann wieder A und so weiter. Ist einer getroffen, so setzen die anderen beiden das Duell fort. Die Trefferwahrscheinlichkeit von A ist 0,3, die von B 1,0 und die von C 0,5. Jeder Schütze entscheidet, wenn er an der Reihe ist, selbst, wohin er den Schuss richtet – auf einen der Gegner oder in die Luft. Alle sind gute Mathematiker und treffen immer die Entscheidung, die ihnen maximale Überlebenschancen verspricht. Wohin richtet A seinen ersten Schuss? Wie hoch sind die Überlebenschancen für A, B und C?

Aufgabe 50 (10 Zusatzpunkte)

Sie sind eines von $2n + 1$ Mitgliedern ($n \in \mathbb{N}$) eines Gremiums, in dem eine Abstimmung durchgeführt wird. Jedes Mitglied kann mit "ja" oder "nein" stimmen (Enthaltungen sind nicht möglich), die einfache Mehrheit entscheidet. Nehmen sie an, dass jedes der $2n$ anderen Mitglieder sich zufällig für "ja" oder "nein" entscheidet.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre eigene Stimme den Ausschlag gibt?

b) Nähern Sie die Fakultäten im Ergebnis von Teil (a) für große n durch die Stirlingssche Formel (vgl. Vorlesung, Kapitel 3),

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \text{für } n \to \infty\,.$$

Wie sinkt demnach Ihr Einfluss mit wachsender Größe des Gremiums, d.h. für große n?

c) 2007 setzte sich Polen dafür ein, die Anzahl der Stimmen, die ein Mitgliedsstaat im Rat der Europäischen Union hat, proportional zur Wurzel der Bevölkerungszahl zu wählen. War dies ein sinnvoller und fairer Vorschlag? Begründen Sie Ihre Antwort.