Universitiät Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2011
Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Übungsblatt 12 (keine Abgabe)

Aufgabe 51
Wir betrachten Ereignisse (im Alltagsinn des Wortes), die mit gleicher Wahrscheinlichkeit an jeder Stelle eines gegebenen Bereiches auftreten können, z.B. Gewitter in Deutschland innerhalb eines Monats (Ereignis: Gewitter, Bereich: Zeitintervall "ein Monat"), Regentropfen, die auf eine Fläche der Größe $1\mathrm{m}^2$ treffen (Ereignis: Auftreffen eines Regentropfens an der Stelle x, Bereich: die Fläche), Zerfälle von radioaktiven Atomen pro Jahr in 1kg Plutonium (Ereignis: Zerfall eines Atoms, Bereich: Zeitintervall "ein Jahr").

Die Zufallsvarible X zähle die Anzahl der Ereignisse pro Bereich (z.B. Gewitter pro Monat, Regentropfen pro m^2, oder Zerfälle pro Jahr). Es sei bekannt, dass $E(X) = \lambda > 0$, d.h. im Mittel treten im angegeben Bereich λ Ereignisse auf. Wie ist X verteilt?

Gehen Sie zur Beantwortung der Frage wie folgt vor. Unterteilen Sie den Bereich in n gleich große Teile ($n > \lambda$), nummeriert mit $i = 1, \dots, n$. In jedem Teil i finde mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ genau eines der Ereignisse statt (p gleich für alle i) und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ keines.

a) Wie ist X nun verteilt?
b) Wie müssen Sie p wählen, um $E(X) = \lambda$ zu erfüllen?
c) Führen Sie nun den Limes $n \to \infty$ durch (warum?), und zeigen Sie daduch, dass $X \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$.

Hinweis: Es ist unterwegs sinnvoll, $b(k; n, \frac{\lambda}{n})$ wie folgt zu schreiben,

$$b(k; n, \tfrac{\lambda}{n}) = \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k},$$

und dann den Limes $n \to \infty$, k fest, durchzuführen.

Aufgabe 52

a) Sei $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(X)$.
b) Sei $Y \sim \mathrm{Pois}(\lambda)$. Bestimmen Sie $\mathrm{Var}(Y)$.

Hinweis: Die Erwartungswerte Binomial- und Poisson-verteilter ZV haben wir in der Vorlesung berechnet, $E(X) = np$ und $E(Y) = \lambda$.

Aufgabe 53
Seien X_j, $j = 1, ..., N$, binomialverteilte ZV, genauer $X_j \sim \mathrm{Bin}(n_j, p)$. Sei außerdem $Y := \sum_{j=1}^N X_j$. Zeigen Sie:

$$E(Y) = \sum_{j=1}^N E(X_j) \qquad \text{und} \qquad \mathrm{Var}(Y) = \sum_{j=1}^N V(X_j).$$