Universität Tübingen, Mathematisches Institut
Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler Sommersemester 2011

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Klausur am 14.07.2011

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 96 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfsmittel: Ein handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (4+10 = 14 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^\infty \sin(x)\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ HINWEIS: Zweifache partielle Integration

b) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{11x-14}{(x^2-4)(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$ HINWEIS: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (6 Punkte)
Lösen Sie das Anfangswertproblem (AWP) $yy' + 2x = xy^2$, $y(0) = -1$.

Aufgabe 3 (4+2+4 = 10 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle reellen Lösungen $y(x)$ von $y'' + 2y' + 2y = 0$.
b) Lösen Sie das AWP $y'' + 2y' + 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$.
c) Bestimmen Sie eine Lösung von $y'' + 2y' + 2y = 5\sin(x)$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)
Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = xy\,\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 5 (2+6+2 = 10 Punkte)
Sei $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ mit $x_j \geq 0\ \forall j = 1, \ldots, n$ sowie

$$f(\vec{x}) = -\sum_{j=1}^n x_j \log x_j \qquad \text{und} \qquad g(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n x_j\,.$$

Wir suchen Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(\vec{x}) = 1$.

a) Definieren Sie eine geeignete Lagrange-Funktion L.
b) Leiten aus L die Bestimmungsgleichungen für potentielle Extremstellen ab, und lösen Sie diese.
c) Was ist der Funktionswert von f an der potentiellen Extremstelle?

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ kein Vielfaches der Einheitsmatrix und es gelte $A^2 = 7A$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Bringen Sie die quadratische Form in

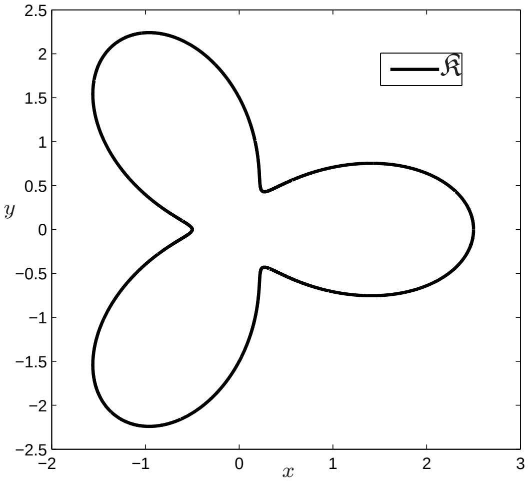
$$10xy - 3(x^2 + y^2) = 1$$

auf Hauptachsen, geben Sie an, was für ein Kegelschnitt durch die Gleichung beschrieben wird, und zeichnen Sie ihn.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Berechnen Sie das Kurvenintegral $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f} \mathrm{d}\vec{x}$ für

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} y \\ -x \\ xy \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ \sin t \end{pmatrix}, \ 0 \le t < 2\pi.$$



Aufgabe 9 (6 Punkte)

Berechnen Sie den Inhalt der von der Kurve

$$\mathfrak{K} : \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{3}{2} + \cos(3t)) \cos t \\ (\frac{3}{2} + \cos(3t)) \sin t \end{pmatrix},$$

$$0 \le t < 2\pi,$$

eingeschlossenen Fläche.

Hinweis: Polarkoordinaten sind hilfreich, und Sie dürfen $\int_0^{2\pi} \cos^2 t \, \mathrm{d}t = \pi$ verwenden.

Aufgabe 10 (10+4 = 14 Punkte)

Sei $\vec{x} = (x,y,z)^T$,

$$\mathcal{T} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \vec{x} = \begin{pmatrix} (1 + r\sin u)\cos v \\ (1 + r\sin u)\sin v \\ r\cos u \end{pmatrix}, \begin{array}{l} 0 \le r \le \frac{1}{2}, \\ 0 \le u < 2\pi, \\ 0 \le v < 2\pi. \end{array} \right\} \quad \text{und} \quad \vec{v}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x + \sin(y) \\ x^2 z + y \\ \cos(x) - z \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie das Volumen von $\mathcal{T}$, d.h. $\int_{\mathcal{T}} \mathrm{d}V$

b) Bestimmen Sie den Fluss von $\vec{v}$ durch die Oberfläche von $\mathcal{T}$, d.h. $\int_{\partial\mathcal{T}} \vec{v}\,\vec{n}_a \,\mathrm{d}O$, wobei die Normale $\vec{n}_a$ nach außen zeige.