Universität Tübingen, Mathematisches Institut Sommersemester 2011
Johannes von Kéler & Dr. Stefan Keppeler

Mathematik II für Naturwissenschaftler

Nachklausur am 05.10.2011

Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift. Bitte beginnen Sie jede Aufgabe auf einer neuen Seite. Zusätzliches Papier ist jederzeit verfügbar. **Zeigen Sie auch stets Ihren Rechenweg!**

Es sind maximal 105 Punkte erreichbar, 80 Punkte $\widehat{=}$ 100% ($\widehat{=}$ Note 1,0), 50% $\widehat{=}$ 40 Punkte sind hinreichend zum Bestehen ($\widehat{=}$ Note 4,0).

Erlaubtes Hilfmittel: Ein beidseitig handbeschriebenes Blatt (DIN A4).
Bearbeitungszeit: 120 Minuten. **Viel Erfolg!**

Aufgabe 1 (5+9 = 14 Punkte)
Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^\infty x^2\,\mathrm{e}^{-\pi x}\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Zweifache partielle Integration

b) $\displaystyle\int_2^\infty \frac{4}{(x^2-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$ Hinweis: Partialbruchzerlegung

Aufgabe 2 (4+3+3+4 = 14 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Lösungen $y(x)$ von $y' + xy = 0$.
b) Geben Sie eine Lösung von $y' + xy = x$ an.
c) Lösen Sie das AWP $y' + xy = x$, $y(0) = 3$.
d) Bestimmen Sie eine Lösung von $y' + xy = \mathrm{e}^{-x^2/2}\sin x$.

Aufgabe 3 (4+2+2+4 = 12 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 6 & 17 \end{pmatrix}.$$

b) Wie lauten die Eigenwerte von $\frac{1}{100}A$?
c) Wie lang sind die Halbachsen der durch $8x^2 + 17y^2 + 12xy = 100$ beschriebenen Ellipse?
d) Zeichnen Sie die Ellipse aus Teil c.

Aufgabe 4 (3+8+3 = 14 Punkte)
Die symmetrische Matrix A erfülle

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \qquad A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

a) Wie lauten die Eigenwerte von A?
b) Bestimmen Sie A.
c) Lösen Sie das AWP $\vec{y}'(x) = A\,\vec{y}(x)$, $\vec{y}(0) = (1 \;\; 0 \;\; -1)^T$.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Für die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gelte $\det A < 0$ und $A^2 + A = 2I$. Bestimmen Sie die Eigenwerte von A.

Aufgabe 6 (13 Punkte)

Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von

$$f(x,y) = (x^3 - x)(y^2 - \tfrac{1}{4})\,,$$

d.h. alle (x,y) mit $(\nabla f)(x,y) = 0$. Finden Sie heraus, ob an diesen Stellen Minima, Maxima oder Sattelpunkte vorliegen.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Berechnen Sie die Oberfläche $O(\mathcal{T}) = \int_{\mathcal{T}} \mathrm{d}O$ des Torus'

$$\mathcal{T} = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \vec{x} = \begin{pmatrix} (5+\sin u)\cos v \\ (5+\sin u)\sin v \\ \cos u \end{pmatrix}\,,\ 0 \le u < 2\pi\,,\ 0 \le v < 2\pi \right\}.$$

Aufgabe 8 (4+6 = 10 Punkte)

Sei $\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix}$, $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $\int_{\mathfrak{K}} \vec{f}\,\mathrm{d}\vec{x}$ für

a) $\mathfrak{K}:\ \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$, $\quad 0 \le t \le 2\pi$,

b) $\mathfrak{K}$: Die geradlinige Verbindung von $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ nach $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 9 (3+3+4 = 10 Punkte)

Sei $\vec{f}:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$\vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \cos x_2 \\ x_2 \mathrm{e}^{x_1} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

a) Besitzt $\vec{f}$ in einer Umgebung von $\vec{x}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ eine Umkehrfunktion $\vec{f}_1^{-1}$?

b) Besitzt $\vec{f}$ in einer Umgebung von $\vec{x}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ eine Umkehrfunktion $\vec{f}_2^{-1}$?

c) Bestimmen Sie ggf. die Ableitungen $\vec{f}_1^{-1\prime}(f(\vec{x}_1))$ und $\vec{f}_2^{-1\prime}(f(\vec{x}_2))$.