

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER IV

Übungsblatt 1

Aufgabe 1:

Beweise:

- a) Falls f und g holomorph auf $\Omega \subset \mathbb{C}$ sind und $g(z_0) \neq 0$, dann ist f/g holomorph in z_0 und

$$(f/g)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$

- b) Falls $f : \Omega \rightarrow U$ und $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph sind, so gilt die Kettenregel:

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z) \quad \text{für alle } z \in \Omega.$$

Aufgabe 2:

- a) Seien $z, w \in \mathbb{C}$ mit $\bar{z}w \neq 1$. Zeige

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| < 1 \quad \text{falls } |z| < 1 \text{ und } |w| < 1,$$

sowie

$$\left| \frac{w - z}{1 - \bar{w}z} \right| = 1 \quad \text{falls } |z| = 1 \text{ oder } |w| = 1.$$

Hinweis: Wieso kann man annehmen, dass z reell ist? Damit genügt es, zu zeigen, dass

$$(r - w)(r - \bar{w}) \leq (1 - rw)(1 - r\bar{w})$$

mit Gleichheit für geeignete r und $|w|$.

- b) Zeige, dass für festes $w \in \mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$ die Abbildung

$$F : z \mapsto \frac{w - z}{1 - \bar{w}z}$$

den folgenden Eigenschaften genügt:

- i) F bildet \mathbb{D} auf \mathbb{D} ab und ist holomorph.
- ii) $F(0) = w$ und $F(w) = 0$.
- iii) $|F(z)| = 1$ falls $|z| = 1$.
- iv) $F : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ist bijektiv.

Hinweis: Berechne $F \circ F$.

Aufgabe 3:

Untersuche die folgenden Funktionen unter Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen auf Holomorphie:

- $f(z) = z^n$ für $n \in \mathbb{Z}$,
- $g(z) = \sin(z)$,
- $h(z) = |z|^2$,
- $k(z) = \bar{z}$,
- $l(z) = \operatorname{Re}(z)$.

Aufgabe 4:

Das Integral einer komplexen Funktion f entlang einer Kurve $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ in der komplexen Ebene ist definiert als

$$\int_{\gamma} f dz = \int_0^{2\pi} f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

Berechne die Integrale

$$\int_{\gamma} z^n dz, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Dabei ist γ ein

- a) beliebiger Kreis mit Mittelpunkt im Ursprung mit positivem Umlaufsinn (Gegenuhrzeigersinn), d.h. $z = \gamma(t) = ae^{it}$.
- b) beliebiger Kreis, der den Ursprung nicht einschließt mit positivem Umlaufsinn.