Mathematik für Physiker IV

Sommersemester 2011
C. Hainzl, A.J. Wöhr, G. Bräunlich

Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 10

Aufgabe 40:

Diese Aufgabe zeigt, wie die Symmetrie einer Funktion gewisse Eigenschaften ihrer Fourierkoeffizienten bestimmt. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ eine 2π-periodische, Riemann-integrable Funktion.

a) Zeige, dass die Fourier-Reihe der Funktion f geschrieben werden kann als

$$f(\theta) \sim \hat{f}(0) + \sum_{n \geq 1} [\hat{f}(n) + \hat{f}(-n)] \cos(n\theta) + i[\hat{f}(n) - \hat{f}(-n)] \sin(n\theta).$$

b) Beweise, dass falls f gerade ist, so gilt $\hat{f}(n) = \hat{f}(-n)$ und wir bekommen eine Cosinus-Reihe.

c) Beweise, dass falls f ungerade ist, so gilt $\hat{f}(n) = -\hat{f}(-n)$ und wir bekommen eine Sinus-Reihe.

d) Nehme an, dass $f(\theta + \pi) = f(\theta)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\hat{f}(n) = 0$ für alle ungeraden n.

e) Zeige, dass f reellwertig ist genau dann wenn $\overline{\hat{f}(n)} = \hat{f}(-n)$ für alle n.

Aufgabe 41:

Betrachte die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & |\theta| > \delta, \\ 1 - |\theta|/\delta & |\theta| \leq \delta. \end{cases}$$

Zeige, dass

$$f(\theta) = \frac{\delta}{2\pi} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos(n\delta)}{n^2 \pi \delta} \cos(n\theta).$$

Aufgabe 42:

Es sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(\theta) = |\theta|$.

a) Zeichne den Graphen von f.

b) Bestimme die Fourier-Koeffizienten von f. Zeige weiter:

$$\hat{f}(n) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & n = 0, \\ (-1 + (-1)^n)/\pi n^2 & n \neq 0. \end{cases}$$

c) Bestimme die Fourier-Reihe von f in Termen von Sinus und Cosinus.

d) Es sei $\theta = 0$. Zeige, dass

$$\sum_{n \text{ odd } \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Aufgabe 43:

a) Zeige, dass der Fejér-Kern durch

$$F_N(x) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nx/2)}{\sin^2(x/2)}$$

gegeben ist.
Hinweis: Beachte, dass

$$NF_N(x) = D_0(x) + ... + D_{N-1}(x),$$

wobei $D_n(x)$ der Dirichlet-Kern ist. Demzufolge erhalten wir für $\omega = \exp(ix)$

$$NF_N(x) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\omega^{-n} - \omega^{n+1}}{1-\omega}.$$

b) Zeige weiter, dass $F_N(x)$ eine Familie guter Kerne ist.