# Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 11

**Aufgabe 44:**

Zeige, dass

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx$$

ein inneres Produkt ist.

**Aufgabe 45:**

Die Auslenkung einer schwingenden Saite zur Zeit $t$ sei gegeben durch $u(x,t)$ und erfülle die Wellengleichung

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad c^2 = \frac{\tau}{\rho}.$$

Die Saite sei zur Zeit $t = 0$ wie folgt ausgelenkt:

$$\begin{aligned} u(x,0) &= f(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= g(x), \end{aligned}$$

wobei $f \in C^1$ und $g$ stetig ist. Die totale Energie der Saite setzt sich aus der kinetischen und der Potentiellen Energie zusammen und ist gegeben durch:

$$E(t) = \frac{1}{2}\rho\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{1}{2}\tau\int_0^L \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Zeige, dass die totale Energie der Saite erhalten ist im Sinne, dass $E(t)$ konstant ist und zwar

$$E(t) = E(0) = \frac{1}{2}\rho\int_0^L g(x)^2 dx + \frac{1}{2}\tau\int_0^L f'(x)^2 dx.$$

**Aufgabe 46:**

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Sägezahnfunktion, definiert durch $f(x) = (\pi - x)/2$ für $x \in (0, 2\pi)$ mit $f(0) = 0$ und periodisch fortgesetzt auf ganz $\mathbb{R}$.

Die Fourierreihe von $f$ ist

$$\frac{1}{2i}\sum_{|n|\neq 0} \frac{e^{inx}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}.$$

$f$ macht bei $x = 0$ einen Stetigkeitssprung von $f(0^+) - f(0^-) = \pi$.

Zeige, dass

$$\max_{0<x\leq\pi/N} S_N(f)(x) - \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi} \frac{\sin(t)}{t}dt - \frac{\pi}{2},$$

was ungefähr 9 % vom Sprung ausmacht. Dieses Resultat ist eine Manifestation des Gibbsschen Phänomens, welches besagt, dass nahe bei einem Stetigkeitssprung die Fourierreihe einer Funktion, von dieser um ungefähr 9 % abweicht.

**Hinweis:**

$$S_N(f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} \hat{f}(n)e^{inx} = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{1}{2}\int_0^x (D_N(t) - 1)dt,$$

wobei $D_N$ den Dirichlet-Kern bezeichnet.

**Aufgabe 47:**

Seien $F$ und $G$ integrierbar auf dem Einheitskreis mit

$$F \sim \sum a_n e^{in\theta}, \qquad G \sim \sum b_n e^{in\theta}.$$

Zeige, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta)\overline{G(\theta)}d\theta = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n\overline{b_n},$$

**Hinweis:** Zeige die Parseval'sche Identität

$$(F, G) = \frac{1}{4}[\|F+G\|^2 - \|F-G\|^2 + i(\|F+iG\|^2 - \|F-iG\|^2)]$$

und benutze diese.

**Aufgabe 48:**

Sei $f$ eine $2\pi$-periodische, Riemann-integrierbare Funktion.

a) Zeige dass,

$$\hat{f}(n) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi/n)e^{-inx}dx,$$

und somit, dass

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - f(x+\pi/n)]e^{-inx}dx,$$

b) Es sei $f$ stetig. Zeige $|\hat{f}(n)| \to 0$ für $n \to \infty$.

c) Nehme jetzt an, dass $f$ der Hölder Bedingung der Ordnung $\alpha$ genügt, das heisst,

$$|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha$$

für $0 < \alpha \leq 1$, $C > 0$ und beliebige $x, h$. Benutze Teil a) um zu zeigen, dass

$$\hat{f}(n) = O(1/|n|^\alpha).$$