Universität Tübingen
Mathematisches Institut

Mathematik für Physiker IV

Sommersemester 2011

C. Hainzl, A.J. Wöhr, G. Bräunlich

Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 12

Aufgabe 49:

Seien f und g die Funktionen

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Obwohl f nicht stetig ist, macht das Integral, welches die Fouriertransformation definiert trotzdem Sinn. Zeige, dass

$$\hat{f}(\xi) = \frac{\sin(2\pi\xi)}{\pi\xi} \qquad \hat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin(\pi\xi)}{\pi\xi}\right)^2,$$

wobei $\hat{f}(0) = 2$ und $\hat{g}(0) = 1$.

Aufgabe 50:

Sei f stetig mit $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Zeige, dass $\hat{f}$ stetig ist und $\hat{f}(\xi) \to 0$ für $|\xi| \to \infty$.

Hinweis: Zeige zuerst, dass $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left[f(x) - f(x - \frac{1}{2\xi})\right] \mathrm{e}^{-2\pi i x\xi} dx$.

Aufgabe 51:

Sei f stetig und $|f(x)| \leq \frac{A}{1+x^2}$. Verwende $K_\delta(x) = \delta^{-1/2} e^{-\pi x^2/\delta}$ und

$$\int f(x)\hat{g}(x)dx = \int \hat{f}(y)g(y)dy$$

um zu zeigen, dass $\hat{f}(y) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

Aufgabe 52:

Wende die Poisson Summationsformel auf $g(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ an, um zu zeigen, dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(n+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)},$$

wobei $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$.