Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 2

Aufgabe 5:

Berechne die folgenden Wegintegrale:

a) $f(z) = |z|^2$ entlang des Weges, der durch die Strecke von -1 nach 1 und den oberen Einheitshalbkreis gegeben ist.

b) $g(z) = \bar{z}^n$, $n \in \mathbb{Z}$ entlang des positiv orientierten Einheitskreises.

c) $h(z) = \mathrm{Im}(z)$ entlang des Randes des Quadrats, das durch die Eckpunkte $-1-\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$, $1+\mathrm{i}$ und $-1+\mathrm{i}$ festgelegt wird.

Aufgabe 6:

Bestimme den Konvergenzradius folgender Potenzreihen:

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1+a^k}{1+b^k}\right) z^k \qquad a\,, b > 0$

b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} k \left(1+\frac{3}{k}\right)^{k^2} z^k$

c) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{(k^2)}}{k!}$

d) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad \text{wobei } a_k = \begin{cases} \frac{1}{n!} & \text{falls } k = n^2\,, \qquad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Aufgabe 7:

Zeige, dass in Polarkoordinaten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen folgende Form haben

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \quad \text{und} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$

Benutze dies, um zu zeigen, dass der komplexe Logarithmus

$$\log(z) = \log(r) + i\theta, \text{ wobei } z = re^{i\theta} \text{ mit } -\pi < \theta < \pi$$

auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ (d.h. $r > 0$, $-\pi < \theta < \pi$) holomorph ist.

Aufgabe 8:

Sei $D \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige: Wenn f nur reelle Werte annimmt, so ist f konstant.