Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 4

Aufgabe 12:

Berechne folgende Integrale

$$\int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\cos(bx)dx, \qquad \int_0^\infty \mathrm{e}^{-ax}\sin(bx)dx, \qquad a > 0.$$

Hinweis: Integriere die Funktion $\mathrm{e}^{-Az}, A = \sqrt{a^2+b^2}$, über einen geigneten Kreissektor mit Winkel ω, wobei ω durch $\cos(\omega) = a/A$ gegeben ist.

Aufgabe 13:

Es sei Ω ein offene Teilmenge von $\mathbb{C}$ und $T \subset \Omega$ ein Dreieck, dessen Inneres ebenfalls in Ω liegt. Nehme an, dass die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph auf $\Omega \setminus \{w\}$ ist und lokal beschränkt um w, wobei $w \in T$. Zeige nun, dass

$$\int_T f(z)dz = 0.$$

Aufgabe 14:

Es Sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph auf der offenen Einheitskreisscheibe

$$\mathbb{D} = \left\{ z \in \mathbb{C} \middle| |z| < 1 \right\}.$$

Zeige, dass der Durchmesser $d = \sup_{z,\omega\in\mathbb{D}}|f(z) - f(\omega)|$ vom Bild von $f(\mathbb{D})$ der Beziehung

$$2|f'(0)| \leq d$$

genügt. Desweiteren zeige, dass Gleichheit gilt, falls f linear, $f(z) = a_0 + a_1 z$.
Hinweis: Benutze die Identität $2f'(0) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=r} \frac{f(\zeta)-f(-\zeta)}{\zeta^2} d\zeta$, $0 < r < 1$.

Aufgabe 15:

Es sei f eine analytische Funktion, definiert auf ganz $\mathbb{C}$, sodass für jedes $z_0 \in \mathbb{C}$ mindestens ein Koeffizient in der Entwicklung

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$$

gleich 0 ist. Zeige, dass f ein Polynom ist.
Hinweis: Benutze $c_n n! = f^{(n)}(z_0)$ und ein Abzählbarkeitsargument.

Aufgabe 16:

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen und $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeige, dass der Real- und Imaginärteil von f harmonisch ist, d.h. für $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, dass $\Delta u \equiv \Delta v \equiv 0$.

Hinweis: Zeige, dass
$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} = \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}$$
und schreibe die Cauchy-Riemann-Gleichungen für f als
$$0 = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}.$$