

MATHEMATIK FÜR PHYSIKER IV
Übungsblatt 5

Aufgabe 17:

Berechne mit Hilfe der Cauchy Integralformel folgende Integrale

$$\int_{|z+1|=1} \frac{dz}{(z^2-1)(z-1)^2}, \quad \int_{|z|=2} \frac{\sin z}{z+i} dz, \quad \int_{|z+2i|=3} \frac{\exp(z)}{z^2+\pi^2} dz.$$

Aufgabe 18:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $r, c > 0$. Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine ganze Funktion, für die gelte

$$|f(z)| \leq c|z|^n$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq r$. Zeige, dass f ein Polynom vom Grad $m \leq n$ ist.

Aufgabe 19:

Benutze die Eulersche Formel

$$\sin(\pi z) = \frac{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}{2i}$$

um zu zeigen, dass die komplexen Nullstellen von $\sin(\pi z)$ genau die ganzen Zahlen sind und alle von 1. Ordnung sind. Berechne das Residuum von $\frac{1}{\sin(\pi z)}$ bei $z = n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 20:

Berechne das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$