Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 7

Aufgabe 26:

Zeige, dass für $|a| < 1$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \log(|1 - ae^{i\theta}|)d\theta = 0.$$

Beweise dann, dass die gleiche Aussage auch für $|a| \leq 1$ gilt.

Aufgabe 27:

Sei $u \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Beweise

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(u+n)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi u)}.$$

Hinweis: Integriere

$$f(z) = \frac{\pi \cot(\pi z)}{(u+z)^2}$$

über den Kreis $|z| = R_N = N + \frac{1}{2}$, $N \in \mathbb{Z}$, $N \geq |u|$. Addiere dann die Residuen von f im Inneren des Kreises und bilde den Limes $N \to \infty$.

Aufgabe 28:

Sei $f(z)$ holomorph auf $\{z \in \mathbb{C} | |z - z_0| < r\} \setminus \{z_0\}$ und nehme an, dass

$$|f(z)| \leq A|z - z_0|^{-1+\varepsilon}$$

auf einer Umgebung von z_0, für ein $\varepsilon > 0$. Zeige, dass die Singularität von f bei z_0 hebbar ist.

Aufgabe 29:

Beweise, dass alle ganzen Funktionen, die auch injektiv sind, die Form $f(z) = az + b$ haben, mit $a, b \in \mathbb{C}$ und $a \neq 0$.

Hinweis: Wende das *Casorati-Weierstrass-Theorem* und den *Satz der offenen Abbildung für holomorphe Funktionen* auf $f(1/z)$ an.

Aufgabe 30:

Seien f und g holomorph auf einem Gebiet, welches die Scheibe $|z| \leq 1$ enthält. Nehme an, dass f einen einfache Nullstelle bei $z = 0$ hat und sonst nirgends auf $|z| \leq 1$ verschwindet. Setze

$$f_\varepsilon(z) = f(z) + \varepsilon g(z).$$

Zeige, dass für genügend kleine ε gilt, dass $f_\varepsilon(z)$ eine eindeutige Nullstelle auf $|z| \leq 1$ hat.