Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 8

Aufgabe 30:

Zeige, dass für $|a| < 1$ gilt

$$\int_0^{2\pi} \log(|1 - ae^{i\theta}|)d\theta = 0.$$

Beweise dann, dass die gleiche Aussage auch für $|a| \leq 1$ gilt.

Aufgabe 31:

Sei f holomorph auf einer Region, die den Ring $\{z | r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$ enthält, wobei $0 < r_1 < r_2$. Zeige

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

wobei die Reihe absolut im Innern des Rings konvergiert.

Hinweis: Schreibe für $r_1 < |z - z_0| < r_2$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

wobei C_{r_1} und C_{r_2} die Kreise sind, die den Ring beranden.

Aufgabe 32:

Sei f holomorph in der oberen Halbebene $\mathbb{H}$ und stetig und beschränkt auf dem Abschluss $\bar{\mathbb{H}}$. Zeige, dass für $z = x + iy$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(t)y}{(t - x)^2 + y^2} dt.$$

Hinweis: Verwende die Cauchy Integralformel um zu zeigen, dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} f(\xi) \left(\frac{1}{\xi - z} - \frac{1}{\xi - \bar{z}} \right) d\xi,$$

wobei Γ das Quadrat mit den Ecken $\pm l$, $2il \pm l$ ist (positiver Umlaufsinn). Verwende dies um zu argumentieren, dass das Cauchy Problem in der oberen Halbebene in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{auf } y \geq 0 \\ u(t, 0) &= u_0(t, 0) && \text{auf } y = 0 \end{aligned}$$

die Lösung

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u_0(t, 0)y}{(t - x)^2 + y^2} dt.$$

hat.

Aufgabe 33:

Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^6+1} dx = 2\pi/3.$$