Mathematik für Physiker IV

Übungsblatt 9

Aufgabe 34:

Zeige

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{(x^2+1)^2}dx = -\frac{\pi}{4}.$$

Aufgabe 35:

Sei $\psi_\alpha(z) = \frac{(\alpha - z)}{1-\bar{\alpha}z}$ für $|\alpha| < 1$ und $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1\}$. Zeige

$$\frac{1}{\pi}\iint_{\mathbb{D}} |\psi_\alpha'|^2 dxdy = 1.$$

Aufgabe 36:

Zeige, dass die Abbildung

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

eine konforme Abbildung von der oberen Halbscheibe auf den 1. Quadranten ist.

Aufgabe 37:

Bestimme das Bild der Menge $\{z \in \mathbb{C} | 0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2}, \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ und ihrem Rand unter der Abbildung $f(z) = \sin(z)$.

Aufgabe 38:

Zeige dass die Funktion

$$f(z) = \int_0^z \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta(\zeta-1)(\zeta-\lambda)}}, \qquad \text{mit } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

die obere Halbebene konform auf ein Rechteck abbildet.

Hinweis: Es reicht zu zeigen, dass die reelle Achse auf den Rand des Rechtecks abgebildet wird.

Aufgabe 39:

Sei u eine harmonische Funktion auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \big| |z| < 1\}$ die stetig auf $\bar{\mathbb{D}}$ ist. Leite die *Poisson Integral Formel* aus dem Spezialfall $z_0 = 0$ (Mittelwertsatz) her:

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{1-|z_0|^2}{|e^{i\theta}-z_0|^2} u(e^{i\theta})d\theta, \qquad |z_0| < 1.$$

Zeige für $z_0 = re^{i\phi}$, dass

$$\frac{1-|z_0|^2}{|e^{i\theta}-z_0|^2} = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\phi)+r^2}.$$

Hinweis: Setze $u_0 = u \circ \psi_{z_0}$, mit

$$\psi_{z_0}(z) = \frac{z_0 - z}{1-\bar{z}_0 z}.$$

Wende den Mittelwertsatz auf u_0 an und substituiere die Integrationsvariable.