

Mathematik für Physiker IV

Universität Tübingen
Sommersemester 2011

Prof. Dr. Christian Hainzl

vervollständigt und geT_EXt von Mario Laux und Simon Mayer

Inhaltsverzeichnis

1	Komplexe Analysis (Funktionentheorie)	3
1.0	Einleitung	3
1.1	holomorphe Funktionen	3
1.2	Potenzreihen	8
1.3	Integration entlang Kurven	11
1.4	Cauchy-Theorem und Anwendungen	14
1.5	Meromorphe Funktionen	25
1.6	Singularitäten	33
1.7	Komplexer Logarithmus	41
1.8	Konforme Abbildungen	45
2	Fourier-Analysis	54
2.0	Einleitung	54
2.1	Fourier-Reihen	55
2.2	Integralkerne	61
2.3	Wiederholung: Hilbertraum und Skalarprodukt	63
2.4	L^2 -Konvergenz von Fourier-Reihen	65
2.5	Fourier-Transformation	70
2.6	Anwendungsbeispiele von Fourier-Transformationen	75

1 Komplexe Analysis (Funktionentheorie)

1.0 Einleitung

Wir betrachten Funktionen, die von der Menge der komplexen Zahlen in die Menge der komplexen Zahlen abbilden, $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. Eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ setzt sich aus Realteil x und Imaginärteil y zusammen, $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichnet i die imaginäre Einheit, für die gilt $i^2 = -1$. Das Komplexkonjugierte einer komplexen Zahl ist die selbe Zahl mit Vorzeichenwechsel im Imaginärteil: $\bar{z} = x - iy$. Der Betrag einer komplexen Zahl sei definiert durch $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$. Eine geometrische Interpretation komplexer Zahlen ist die Gaußsche Zahlenebene, man trägt den Realteil in x -Richtung, den Imaginärteil in y -Richtung auf. Optisch sieht sie dem zweidimensionalen Raum reeller Zahlen \mathbb{R}^2 ähnlich (vgl. Abbildung 1), wir werden im Folgenden untersuchen worin die beiden sich unterscheiden.

Dazu definieren wir zuerst was es für eine komplexe Funktion bedeutet, holomorph zu sein.

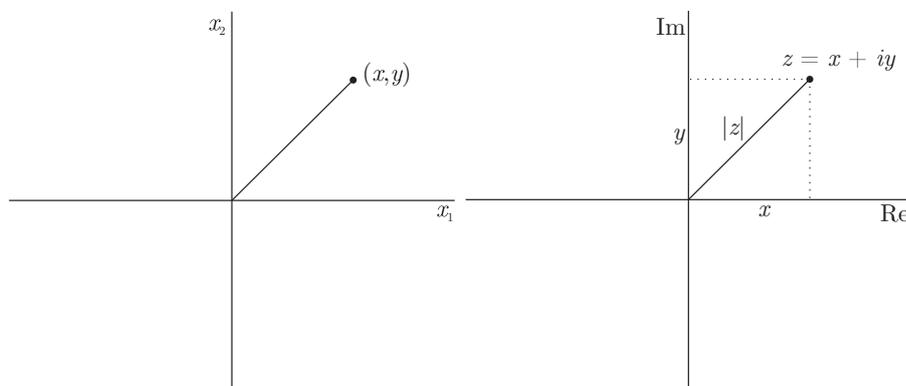


Abbildung 1: Die reelle (links) und komplexe (rechts) Ebene im Vergleich.

1.1 holomorphe Funktionen

1.1.1 Definition. holomorph

Es sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. f heißt *holomorph* in $z_0 \in \mathbb{C} \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h} = a$ existiert. Man schreibt dann $a = f'(z_0)$. Eine alternative Definition lautet: $f(z_0 + h) - f(z_0) = ah + \psi(h)$ wobei für ψ gilt, dass $\frac{|\psi(h)|}{|h|} \rightarrow 0$ ($|\cdot|$ ist die euklidische Norm).

Wir betrachten die Funktion $f(z) = \bar{z} = x - iy$ im Komplexen und analog dazu die zweidimensionale reelle Funktion $F(x, y) = (x, -y)$. F ist total differenzierbar,

$$DF = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $h \in \mathbb{R}$. Bilden wir nun den Differenzenquotienten und nähern uns zuerst auf der reellen, dann auf der imaginären Achse der Null, so erhalten wir:

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{h - 0}{h} = 1$$

$$\frac{f(ih) - f(0)}{ih} = \frac{\overline{ih} - 0}{ih} = -1.$$

Die Funktion $f(z) = \bar{z}$ ist also nicht holomorph. Dies lässt schon vermuten, dass „holomorph“ ein stärkerer Begriff als die totale Differenzierbarkeit ist. Eigenschaften holomorpher Funktionen sind

- (a) f holomorph $\Rightarrow \int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt = 0$, wobei $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ eine Parametrisierung einer Kurve im Komplexen ist.
- (b) f holomorph $\Rightarrow f$ unendlich oft differenzierbar und sogar analytisch.
- (c) $f = g$ auf einer Umgebung $\Rightarrow f = g$ überall.
- (d) Es gilt der Residuensatz:

$$\int_{\gamma} f dz = \sum F(\text{Singularitäten}),$$

wobei die Singularitäten Polstellen in der komplexen Ebene sind. Dadurch lässt sich z.B. das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ leicht berechnen.

In der komplexen Ebene definiert man Mengen analog wie im Reellen:

$$\begin{aligned} D_r(z_0) &= \{z \mid |z - z_0| < r\} \\ \overline{D_r(z_0)} &= \{z \mid |z - z_0| \leq r\} \\ C_r(z_0) &= \{z \mid |z - z_0| = r\} \\ \mathbb{D} &= \{z \mid |z| \leq 1\} \end{aligned} \quad (\text{Einheitskreisscheibe}).$$

Auch Stetigkeit definiert man analog: f heißt stetig in $z_0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 \exists \delta \forall z : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon$. Bemerkung: $\Rightarrow z \mapsto |f(z)|$ ist dann ebenfalls stetig.

1.1.2 Satz.

Eine stetige Funktion auf einer kompakten Menge ist beschränkt und nimmt ihr Maximum an, Ω kompakt \Leftrightarrow abgeschlossen und beschränkt.

Beweis. Siehe Mathematik für Physiker III. □

Wir wenden uns wieder holomorphen Funktionen zu. Ein Beispiel für eine holomorphe Funktion ist die Identität $f(z) = z$. Denn bildet man den Differenzenquotient nach Definition, erhält man

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = 1 = f'(z).$$

Ein weiteres Beispiel ist die Funktion, die einer Zahl ihr Inverses zuordnet, $f(z) = \frac{1}{z}$. Sie ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, $f'(z) = -\frac{1}{z^2}$. Andere Beispiele für holomorphe Funktionen sind die Exponentialfunktion sowie Sinus und Kosinus.

1.1.3 Bemerkung.

Jedes Polynom $p(z) = a_0 + a_1z + \dots + a_nz^n$ ist holomorph.

1.1.4 Satz.

Seien f, g holomorph in $\Omega \subset \mathbb{C}$, dann gilt

- (a) $f + g$ holomorph und $(f + g)' = f' + g'$.
- (b) fg holomorph und $(fg)' = f'g + fg'$.
- (c) $\frac{f}{g}$ holomorph bis auf Nullstellen von g mit $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.
- (d) $f : \Omega \rightarrow U, g : U \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph, dann ist $g \circ f$ holomorph mit $(g \circ f)' = g'(f(z))f'$.

Beweis. Für (b): Seien f, g holomorph in z . Das heißt es gilt

$$\begin{aligned} f(z+h) - f(z) &= f'(z)h + \psi(h) & \frac{|\psi(h)|}{|h|} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ g(z+h) - g(z) &= g'(z)h + \phi(h) & \frac{|\phi(h)|}{|h|} &\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Wir bilden nun die Differenz $F(z+h) - F(z)$ mit $F := fg$:

$$\begin{aligned} & f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z) \\ &= f(z+h)g(z+h) - f(z)g(z+h) + f(z)g(z+h) - f(z)g(z) \\ &= g(z+h)(f'(z)h + \psi(h)) + f(z)(g'(z)h + \phi(h)) \\ &= g(z)(f'(z)h + \psi(h)) + f(z)(g'(z)h + \phi(h)) + \underbrace{(g'(z)h + \phi(h))(f'(z)h + \psi(h))}_{:=A(h)} \\ &= (g(z)f'(z) + f(z)g'(z))h + \underbrace{g(z)\psi(h) + f(z)\phi(h) + A(h)}_{:=\Gamma(h)}, \end{aligned}$$

wobei $\frac{|\Gamma(h)|}{|h|} \rightarrow 0$ für $h \rightarrow 0$. $\Rightarrow (fg)' = f'g + fg'$. □

Betrachtet man eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, bei der Realteil und Imaginärteil von zwei Variablen x und y abhängen, $f(z) = u + iv = u(x, y) + iv(x, y)$, so kann man wieder vergleichen mit dem reellen Analogon: $F(x, y) : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$. Die totale Ableitung von F ist

$$DF = J = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Was ist nun der Zusammenhang zwischen J und $f'(z)$? Zuerst lässt sich sagen, dass J eine Matrix und $f'(z)$ eine komplexe Zahl ist. Sei $z_0 = x_0 + iy_0, h = h_1 + ih_2$. Bildet man

die Ableitung von f wieder auf die Weise, dass man sich zuerst von der reellen Achse, dann von der imaginären Achse annähert, erhält man

$$f'(z_0) = \lim_{h_1 \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h_1, y_0) - f(x_0, y_0)}{h_1} = \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$f'(z_0) = \lim_{h_2 \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + h_2) - f(x_0, y_0)}{ih_2} = \frac{1}{i} \frac{\partial f}{\partial y}.$$

1.1.5 Definition.

Sei $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph in z , $x + iy \mapsto u + iv$. Dann ist die Ableitung $f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} f = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} f$. Definiere also eine Ableitung nach z :

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Es gilt

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x}(u + iv) = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y}(u + iv).$$

Es bezeichne u_x die partielle Ableitung von u nach x , analog für die anderen Größen. Führt man die Ableitungen aus, erhält man

$$u_x + iv_x = \frac{1}{i}(u_y + iv_y) = -iu_y + v_y.$$

Für Gleichheit müssen komplexe Zahlen in Real- und Imaginärteil übereinstimmen. Man erhält zwei Gleichungen, die sog. *Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen* (C.-R.-DGL):

$$u_x = v_y \quad u_y = -v_x.$$

1.1.6 Satz.

Sei $f = u + iv$ holomorph in z_0 , dann gilt

- (a) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}} f(z_0) = 0$
- (b) $f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f(z_0) = 2 \frac{\partial u}{\partial z}$
- (c) $|f'(z_0)|^2 = \det J(z_0)$

Beweis. Für (a) offensichtlich, folgt direkt aus der Holomorphie von f . Für (b) bildet man die Ableitung von f :

$$f'(z_0) = \frac{\partial}{\partial z} f = \frac{\partial}{\partial z}(u + iv) = \frac{\partial}{\partial z} u + i \frac{\partial}{\partial z} v,$$

wobei man den Imaginärteil ersetzen kann mithilfe der C.-R.-DGL. Schreibe dazu

$$i \frac{\partial}{\partial z} v = \frac{i}{2}(v_x - iv_y) = \frac{1}{2}(iv_x + v_y) = \frac{1}{2}(-iu_y + u_x) = \frac{\partial}{\partial z} u.$$

Also ist

$$\Rightarrow f'(z_0) = 2 \frac{\partial}{\partial z} u.$$

Für (c) schreibt man

$$\det J = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} = u_x v_y - u_y v_x = u_x^2 + u_y^2 = \left| \frac{\partial}{\partial x} u + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} u \right|^2 = \left| 2 \frac{\partial}{\partial z} u \right|^2 = |f'(z_0)|^2.$$

□

1.1.7 Satz. Cauchy's Theorem

Sei C ein stetig differenzierbarer geschlossener Weg in \mathbb{C} mit Parametrisierung $z(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ und sei f holomorph und stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt = 0.$$

Beweis. Die Parametrisierung ist $z(t) = x(t) + iy(t)$. Es bezeichne A die von C eingeschlossene Fläche. Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned} \int_a^b (u + iv) \cdot (x'(t) + iy'(t)) dt &= \int_a^b (ux'(t) - vy'(t)) dt + i \int_a^b (uy'(t) + vx'(t)) dt \\ &= \int_a^b \begin{pmatrix} u \\ -v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt + i \int_a^b \begin{pmatrix} v \\ u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} dt \\ &= \iint_A -(v_x + u_y) d(x, y) + i \iint_A (u_x - v_y) d(x, y) \\ &= 0, \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt der Satz von Green und im letzten Schritt die C.-R.-DGL angewendet wurden. □

1.1.8 Theorem.

Sei $f = u + iv$ eine komplexe Funktion auf $\Omega \subset \mathbb{C}$. Seien u, v stetig differenzierbar und erfüllen die C.-R.-DGL. Dann ist f holomorph auf Ω und $f'(z) = \frac{\partial}{\partial z} f = 2 \frac{\partial}{\partial z} u$.

Beweis. Es sei $h = h_1 + ih_2$. Da u, v stetig differenzierbar, kann man für diese schreiben

$$\begin{aligned} u(x + h_1, y + h_2) - u(x, y) &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h| \psi_1(h) \\ v(x + h_1, y + h_2) - v(x, y) &= \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h| \psi_2(h). \end{aligned}$$

Schreibe also um die Holomorphität zu zeigen

$$\begin{aligned}
 f(z+h) - f(z) &= u(z+h) - u(z) + i(v(z+h) - v(z)) \\
 &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h|\psi_1(h) + i \left(\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h|\psi_2(h) \right) \\
 &= \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h|\psi_1(h) + i \left(\begin{pmatrix} -u_y \\ u_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + |h|\psi_2(h) \right) \\
 &= \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial y} u \right)}_{= \frac{\partial}{\partial z} f} (h_1 + ih_2) + \underbrace{|h|\psi_1(h) + i|h|\psi_2(h)}_{\rightarrow 0 \text{ für } h \rightarrow 0} \\
 &\Rightarrow f \text{ holomorph.}
 \end{aligned}$$

□

1.2 Potenzreihen

Wir möchten zeigen, dass die Exponentialfunktion sowie Sinus und Kosinus holomorph sind. Dazu betrachten wir deren Reihenentwicklung, bzw. allgemein Potenzreihen. Zuerst überprüfen wir die harmonische Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

auf Konvergenz. Für $N < \infty$ kann man für die harmonische Reihe schreiben

$$\sum_{n=0}^N z^n = \frac{1 - z^{N+1}}{1 - z}.$$

Wieso geht das? Wir klammern immer jeweils $(1 - z)$ aus und können schreiben

$$\begin{aligned}
 1 - z^{N+1} &= (1 - z)z^N + 1 - z^N \\
 &= (1 - z)(z^N + z^{N-1}) + 1 - z^{N-1} \\
 &= \dots \\
 &= (1 - z) \sum_{n=0}^N z^n.
 \end{aligned}$$

Lassen wir nun N gegen unendlich gehen, so konvergiert die Reihe nur für $|z| < 1$, da sonst der Term z^{N+1} divergiert,

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1 - z} \quad \text{falls } |z| < 1.$$

Für $|z| > 1$ divergiert die Reihe, man sagt dann, der Konvergenzradius ist 1.

Nun betrachten wir eine allgemeine Potenzreihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

1.2.1 Theorem.

Für eine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ existiert ein $0 \leq R \leq \infty$ mit $\frac{1}{R} = \limsup |a_n|^{1/n}$ so dass folgendes gilt:

- (a) Falls $|z| < R$ dann konvergiert die Reihe absolut,
- (b) falls $|z| > R$ dann divergiert die Reihe,
- (c) falls $|z| = R$ ist keine Aussage über Konvergenzverhalten möglich.

Beweis. Für (a): Fixiere ein $|z| < R$, dies ist äquivalent zu $\frac{|z|}{R} < 1$ und damit äquivalent zu $\exists \epsilon > 0 : |z| \left(\frac{1}{R} + \epsilon\right) < 1$. Da nach Voraussetzung gilt, dass $\limsup |a_n|^{1/n} = \frac{1}{R}$, kann man schreiben

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall n > n_\epsilon : |a_n|^{1/n} \leq \frac{1}{R} + \epsilon \\ &\Rightarrow |z| |a_n|^{1/n} = r < 1 \\ &\Rightarrow \sum_{n=n_\epsilon}^{\infty} |z|^n |a_n| \leq \sum_{n=n_\epsilon}^{\infty} r^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} r^n = \frac{1}{1-r} < \infty. \end{aligned}$$

Beweis für (b): Sei nun $|z| > R$ fest, wieder formen wir äquivalent um zu $\frac{|z|}{R} > 1$ bzw. zu $|z| \left(\frac{1}{R} - \epsilon\right) > 1$. Dann

$$\begin{aligned} &\exists \{a_{n_k}\}_{k \in \mathbb{N}} \forall \epsilon > 0 \exists k_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall k > k_\epsilon : |a_{n_k}|^{1/n_k} \geq \frac{1}{R} - \epsilon \\ &\Rightarrow \text{Die Reihe } \sum_{n=0}^{\infty} |z|^n |a_n| \text{ hat unendlich viele Glieder, die } \geq 1 \text{ sind,} \\ &\quad |z|^{n_k} |a_{n_k}| > 1 \\ &\Rightarrow \text{Die Reihe divergiert.} \end{aligned}$$

□

1.2.2 Theorem. (a) Die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ definiert eine holomorphe Funktion innerhalb ihres Konvergenzradius,

- (b) die Ableitung von f ist auch eine Potenzreihe und zusätzlich gilt $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$,
- (c) f' hat den selben Konvergenzradius wie f .

Beweis. Zu (c): Wie man durch Multiplizieren mit 1 sieht, gilt

$$\limsup |a_n|^{1/n} = \limsup \underbrace{|n|^{1/n}}_{=1} \limsup |a_n|^{1/n} = \limsup |na_n|^{1/n}.$$

Also haben $\sum_n a_n z^n$ und $\sum_n na_n z^n$ und somit auch $\sum_n a_n z^{n-1}$ den selben Konvergenzradius. Zu (a) und (b): Definiere eine Funktion

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}.$$

Sei nun $|z_0| < R, \Rightarrow \exists r : |z_0| < r < R$. Spalte $f(z)$ auf in einen Teil mit endlichem Summationsindex und Rest: $f(z) = f_N(z) + u_N(z)$. Dabei sind die einzelnen Teile wie folgt definiert: $f_N(z) = \sum_{n=0}^N a_n z^n$ und $u_N(z) = f(z) - f_N(z) = \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n z^n$. Es gilt nun für ein h mit $|z_0 + h| < R$

$$\begin{aligned} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - g(z_0) &= \underbrace{\frac{f_N(z_0 + h) - f_N(z_0)}{h} - f'_N(z_0)}_{=\alpha_1} + \underbrace{f'_N(z_0) - g(z_0)}_{=\alpha_2} + \\ &\quad + \underbrace{\frac{u_N(z_0 + h) - u_N(z_0)}{h}}_{=\alpha_3}. \end{aligned}$$

Wir müssen nun zeigen, dass die $\alpha_i, i = 1, 2, 3$ verschwinden, dann konvergiert der Differenzenquotient gegen die Ableitung und die Potenzreihe ist damit holomorph. Dazu eine Nebenrechnung. Allgemein gilt

$$\begin{aligned} |a^n - b^n| &= |a^n| \left| 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^n \right| \\ &= |a^n| \left| \left(1 - \frac{b}{a}\right) \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k \right| \\ &= |a^{n-1}| |a - b| \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{b}{a}\right)^k \right|. \end{aligned}$$

Für $|b| < |a| < r$ kann man dies schreiben als

$$|a^n - b^n| \leq |a - b| r^{n-1} n.$$

Damit kann man α_3 abschätzen:

$$\begin{aligned} |\alpha_3| &= \left| \frac{u_N(z_0 + h) - u_N(z_0)}{h} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| \left| \frac{(z_0 + h)^N - z_0^N}{h} \right| \\ &\leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n| n r^{n-1}. \end{aligned}$$

Da $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|nr^{n-1} < \infty$ folgt, dass der Abstand zwischen den Reihengliedern immer kleiner werden muss: $\sum_{n=N+1}^{\infty} |a_n|nr^{n-1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \Rightarrow |\alpha_3| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

Da $\lim_{N \rightarrow \infty} f'_N(z_0) = g(z_0) \Rightarrow |\alpha_2| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$. Das bedeutet, dass $\forall \epsilon > 0 \exists N_\epsilon \in \mathbb{N} : \forall N > N_\epsilon : |\alpha_2| + |\alpha_3| < \frac{\epsilon}{2}$. Da die Funktion f_N ein Polynom ist, ist sie holomorph, d.h.

$$\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f_N(z_0 + h) - f_N(z_0)}{h} - f'_N(z_0) \right| = 0.$$

Also findet man ein $\delta > 0$ sodass gilt $|h| < \delta \Rightarrow |\alpha_1| < \frac{\epsilon}{2}$. Also kann man für die ursprüngliche Differenz schreiben

$$\Rightarrow \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} g(z_0) \right| < |\alpha_1| + |\alpha_2| + |\alpha_3| < \epsilon \quad \forall |h| < \delta.$$

□

1.2.3 Korollar.

Eine Potenzreihe ist unendlich oft komplex differenzierbar innerhalb ihres Konvergenzradius und ihre höheren Ableitungen erhält man durch gliedweises Ableiten.

1.2.4 Definition.

Eine Funktion $f(z)$ auf $\Omega \subset \mathbb{C}$ heißt *analytisch*, wenn eine Potenzreihe $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ (mit Mittelpunkt z_0) existiert, sodass $f \equiv g$ auf einer Umgebung von z_0 . Das bedeutet also, dass das Theorem 1.2.2 aussagt: Aus analytisch folgt holomorph. Später werden wir zeigen, dass die Umkehrung auch gilt.

1.3 Integration entlang Kurven

1.3.1 Definitionen.

Für Kurven im Komplexen definieren wir Folgendes:

- (a) Eine *parametrisierte Kurve* ist eine Menge $\gamma \in \mathbb{C}$ zusammen mit einer Parametrisierung $z : [a, b] \rightarrow \gamma$ (bijektiv), d.h. $z([a, b]) = \gamma$. Man bezeichnet die Kurve als *geschlossen*, falls $z(a) = z(b)$.
- (b) Die Kurve ist *differenzierbar*, falls z' existiert (dies ist im Folgenden immer der Fall). Bei $t = a, b$ werden $z'(a), z'(b)$ interpretiert als

$$z'(a) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \quad z'(b) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} \frac{f(b+h) - f(b)}{h}.$$

- (c) Die Kurve ist *stückweise differenzierbar*, falls z stetig auf $[a, b]$ und die Punkte $a = a_0 < a_1 < \dots < a_n = b$ existieren, so dass z auf $[a_{n-1}, a_n]$ differenzierbar ist (im Allgemeinen müssen die Rechts-/Linksableitungen nicht mehr übereinstimmen).

- (d) $z_1 : [a, b] \rightarrow \gamma$ und $z_2 : [c, d] \rightarrow \gamma$ heißen *äquivalent*, falls eine stetig differenzierbare Bijektion $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$ (Umparametrisierung) existiert mit $t'(s) > 0$ (Orientierungserhaltung) und $z_2(s) = z_1(t(s))$.
- (e) Die *Umkehrung* von γ ist γ^- mit Parametrisierung $z^-(t) = z(b + a - t)$.
- (f) Die Kurve heißt *einfach* falls sie sich nicht mit sich selbst überschneidet.
- (g) Für eine differenzierbare Kurve $z : [a, b] \rightarrow \gamma$ und $f : \gamma \rightarrow \mathbb{C}$ stetig ist das *Integral* von f entlang γ definiert durch $\int_{\gamma} f(z) dz = \int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt$.
- (h) Es ist (g) wohldefiniert, denn für eine äquivalente Kurve $z_2 : [c, d] \rightarrow \gamma$ mit Umparametrisierung $t : [c, d] \rightarrow [a, b]$ ist das Integral

$$\int_a^b f(z(t)) \cdot z'(t) dt = \int_c^d f(z(t(s))) \cdot z'(t(s)) t'(s) ds = \int_c^d f(z_2(s)) \cdot z_2'(s) ds.$$

- (i) Bei stückweise differenzierbaren Kurven gilt $\int_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(z(t)) \cdot z'(t) dt$.
- (j) Die *Länge* einer Kurve ist definiert durch $l(\gamma) = \int_a^b |z'(t)| dt$.

1.3.2 Beispiel.

Ein Kreis mit Radius r um den Punkt z_0 ist gegeben durch $\gamma = C_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| = r\}$. Seine Parametrisierung ist

$$\begin{aligned} z(t) &= z_0 + re^{it} & t \in [0, 2\pi] & \quad \text{positive Orientierung} \\ z(t) &= z_0 + re^{-it} & t \in [0, 2\pi] & \quad \text{negative Orientierung.} \end{aligned}$$

1.3.3 Satz.

Für Kurvenintegrale im Komplexen gilt

- (a) $\int_{\gamma} (\alpha f(z) + \beta g(z)) dz = \alpha \int_{\gamma} f(z) dz + \beta \int_{\gamma} g(z) dz$.
- (b) $\int_{\gamma} f(z) dz = - \int_{\gamma^-} f(z) dz$.
- (c) $\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq |l(\gamma)| \sup_{z \in \gamma} |f(z)|$.

Beweis. Zu (a): siehe Riemann-Integral, zu (b): siehe Substitutionsregel (Mathe für Physiker III). Zu (c):

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \sup_{t \in [a, b]} |f(z(t))| \int_a^b |z'(t)| dt = |l(\gamma)| \sup_{z \in \gamma} |f(z)|.$$

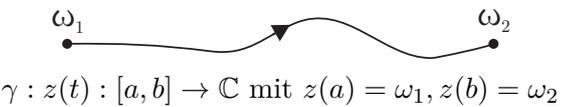
□

1.3.4 Definition.

Eine *Stammfunktion* von $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ mit $F' \equiv f$ auf Ω .

1.3.5 Theorem.

Sei f eine stetige Funktion und habe diese eine Stammfunktion F in Ω und sei γ ein Weg mit Anfangspunkt ω_1 und Endpunkt ω_2 , dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = F(\omega_2) - F(\omega_1).$$


The diagram shows a wavy path γ starting at point ω_1 and ending at point ω_2 . An arrow on the path indicates the direction from ω_1 to ω_2 . Below the diagram, the text reads: $\gamma : z(t) : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ mit $z(a) = \omega_1, z(b) = \omega_2$.

Beweis.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_a^b f(z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} F(z(t)) dt \\ &= F(z(b)) - F(z(a)) \\ &= F(\omega_2) - F(\omega_1). \end{aligned}$$

□

1.3.6 Korollar.

Wenn γ ein geschlossener Weg in Ω und f stetig mit Stammfunktion F ist, dann gilt

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

1.3.7 Beispiel.

Sei C die Kurve, die entlang des Einheitskreises verläuft, $z(t) = e^{it}$. Dann ist $\int_{\gamma} \frac{1}{z} dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} i e^{it} dt = 2\pi i$. $\Rightarrow \frac{1}{z}$ hat keine Stammfunktion auf \mathbb{C} .

1.3.8 Korollar.

Sei f holomorph in Ω mit $f' = 0$. Dann ist f konstant.

Beweis. Verwende, dass nach Voraussetzung $f' = 0$ und dass 1.3.5 gilt,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\gamma} f'(z) dz \\ &= f(z) - f(\omega_0) \\ \Rightarrow f(z) &= f(\omega_0) \\ \Rightarrow f &\text{ konstant.} \end{aligned}$$

□

1.4 Cauchy-Theorem und Anwendungen

1.4.1 Theorem. Goursat's Theorem

Sei Ω ein Gebiet in \mathbb{C} und $T \subset \Omega$, wobei T ein Dreieck ist. Falls f holomorph in Ω gilt

$$\int_T f(z)dz = 0.$$

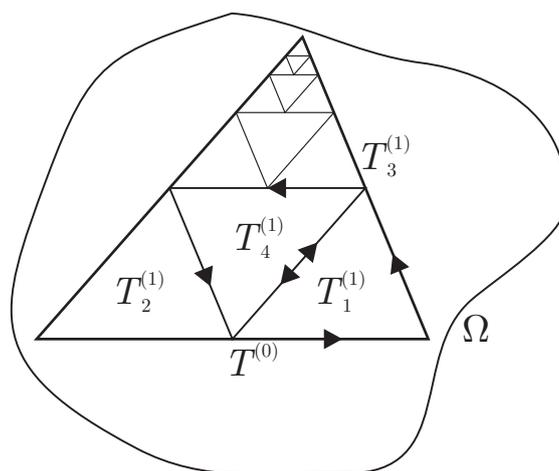


Abbildung 2: Ein Dreieck, das durch Verbinden der Seitenmitten in immer kleinere Dreiecke geteilt wird. Wenn man die Kanten entlang fährt heben sich die Beiträge der inneren Dreiecke gegenseitig auf, wie am Beispiel von $T_1^{(1)}$ und $T_4^{(1)}$ illustriert.

Beweis. Vergleiche Abbildung 2 für eine Veranschaulichung der Vorgehensweise. Wir verbinden die Seitenmitten des Dreiecks T_0 und erhalten vier neue Dreiecke $T_k^{(1)}$, $k = 1, 2, 3, 4$. Für das Wegintegral entlang des Dreiecks gilt dann

$$\int_{T^{(0)}} f(z)dz = \int_{T_1^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_2^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_3^{(1)}} f(z)dz + \int_{T_4^{(1)}} f(z)dz.$$

Es bezeichne i den Index des Dreiecks mit dem größten Flächeninhalt. Damit kann man den Betrag des Wegintegrals abschätzen:

$$\left| \int_{T^{(0)}} f(z)dz \right| \leq 4 \left| \int_{T_i^{(1)}} f(z)dz \right| \leq 4^n \left| \int_{T^{(n)}} f(z)dz \right|.$$

Auf diese Weise erhält man eine Folge von Dreiecken für die gilt $T^{(0)} \supset T^{(1)} \supset \dots \supset T^{(n)}$. Dann $\exists! z_0 \in \mathbb{C} : z_0 \in \bigcap_n T^{(n)} \forall n$. Da f holomorph ist, kann man schreiben

$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)$, wobei $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z)}{z - z_0} = 0$. Es bezeichne $d^{(n)}$ die längste Seite des n -ten Dreiecks. Da stets die Seiten halbiert wurden gilt $d^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n d^{(0)}$. Analog bezeichne $p^{(n)}$ den Umfang des n -ten Dreiecks, auch hier gilt $p^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^n p^{(0)}$. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_{T^{(n)}} f(z) dz &= \int_{T^{(n)}} (f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \psi(z)(z - z_0)) dz \\ &= \int_{T^{(n)}} \psi(z)(z - z_0) dz, \end{aligned}$$

wobei das Integral über die Terme $f(z_0)$ und $f'(z_0)(z - z_0)$ verschwindet, da beide eine bekannte Stammfunktion haben und der Weg geschlossen ist. Nun kann man weiter abschätzen:

$$\begin{aligned} \left| \int_{T^{(0)}} f(z) dz \right| &\leq \left| 4^n \int_{T^{(n)}} f(z) dz \right| \\ &= 4^n \left| \int_{T^{(n)}} \psi(z)(z - z_0) dz \right| \\ &\leq 4^n \sup_{z \in T^{(n)}} (|\psi(z)| |z - z_0|) p^{(n)} \\ &\leq 4^n \sup_{z \in T^{(n)}} |\psi(z)| d^{(n)} p^{(n)} \\ &= \sup_{z \in T^{(n)}} |\psi(z)| d^{(0)} p^{(0)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ &\Rightarrow \int_T f(z) dz = 0. \end{aligned}$$

□

1.4.2 Korollar.

Analog zu 1.4.1 gilt $\int_R f(z) dz = 0$, wenn R ein Rechteck ist.

Beweis. Zerlege das Rechteck in zwei Dreiecke und wende auf diese 1.4.1 an: $\int_R f(z) dz = \int_{T_1} f(z) dz + \int_{T_2} f(z) dz = 0$. □

1.4.3 Theorem.

Eine holomorphe Funktion in einer offenen Kreisscheibe hat eine Stammfunktion in dieser.

Beweis. Vergleiche Abbildung 3 für eine Veranschaulichung der Vorgehensweise. Es bezeichne $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega$. Wir bilden nun die Differenz von $F(z+h)$ und $F(z)$, $h \in \mathbb{C}$, um später den Differenzenquotienten bilden zu können und den Ansatz rechtfertigen zu

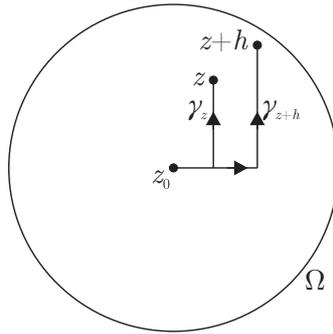
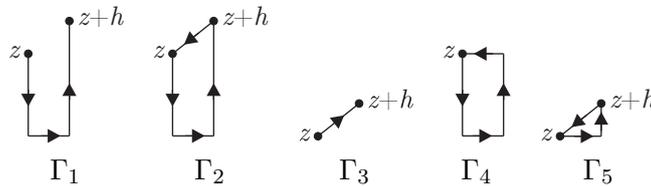


Abbildung 3: Eine offene Kreisscheibe Ω , die mit rechtwinkligen Wegen durchlaufen wird. Dabei ist $(z+h) \in \Omega$.

können. Die im Folgenden verwendeten Wege sind



$$\begin{aligned}
 F(z+h) - F(z) &= \int_{\gamma_{z+h}} f(\omega) d\omega - \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\gamma_{z+h}} f(\omega) d\omega + \int_{-\gamma_z} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\Gamma_1} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\Gamma_2} f(\omega) d\omega + \int_{\Gamma_3} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\Gamma_4} f(\omega) d\omega + \int_{\Gamma_5} f(\omega) d\omega + \int_{\Gamma_3} f(\omega) d\omega.
 \end{aligned}$$

Wie oben schon bewiesen wurde, verschwinden die Integrale über die Wege Γ_4 und Γ_5 , da es sich dabei um ein Rechteck und ein Dreieck handelt. Wir entwickeln nun $f(\omega)$ im Punkt z :

$$f(\omega) = f(z) + \underbrace{f'(z)(z - \omega) + \phi}_{:=\psi(\omega)}.$$

Dabei geht $\psi(\omega)$ schneller als linear gegen Null für $h \rightarrow 0$. Schreibe damit

$$\begin{aligned}
 F(z+h) - F(z) &= \int_{\Gamma_3} f(\omega) d\omega \\
 &= \int_{\Gamma_3} (f(z) + \psi(\omega)) d\omega.
 \end{aligned}$$

Für den ersten Term im Integral kann man schreiben $\int_{\Gamma_3} f(z) d\omega = f(z) \int_{\Gamma_3} 1 d\omega = f(z)h$, was schnell klar wird wenn man eine Parametrisierung $z(t) = z + ht$ mit $t \in [0, 1]$ verwendet. Es verbleibt das Integral über $\psi(\omega)$, welches betragsmäßig abgeschätzt werden kann:

$$\left| \int_{\Gamma_3} \psi(\omega) d\omega \right| \leq \sup_{\omega \in \Gamma_3} |\psi(\omega)| |h| \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.$$

Also kann man $F(z+h) - F(z)$ durch h dividieren, den Limes $h \rightarrow 0$ bilden und erhält $f(z)$. $\Rightarrow F'(z) = f(z)$. \square

1.4.4 Korollar.

Sei f holomorph in Ω , C ein Kreis mit $C \subset \Omega$. Dann gilt $\int_C f(z) dz = 0$.

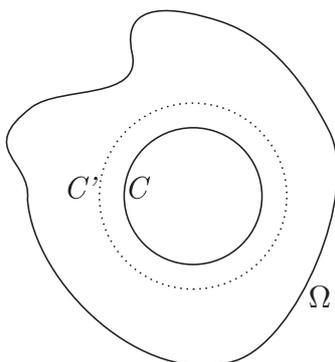
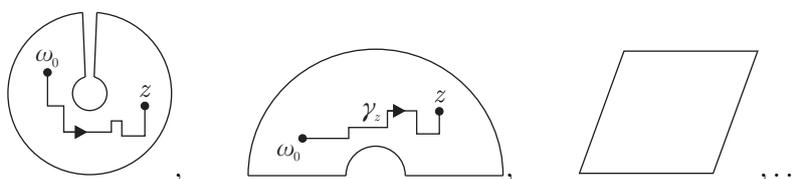


Abbildung 4: Eine Kreislinie C , die vollständig umschlossen wird von einem Kreis mit größerem Radius C' .

Beweis. Da Ω offen ist, gibt es einen Kreis C' mit $C \subset D'$ wobei D' die zu C' gehörige Kreisscheibe ist (vgl. Abbildung 4). Nach Theorem 1.4.3 existiert nun F mit $F' = f$ in D' und damit $\int_C f(z) dz = 0$. \square

1.4.5 Bemerkung.

Den Beweis für Kreise kann man leicht auf sog. „toy contours“ erweitern. Dies sind z. B.



Mittels obiger Beweisstrategie, nämlich der Definition eines Weges γ_z mittels horizontaler und vertikaler Linien, zeigt man, dass es Stammfunktionen in diesen Gebieten gibt.

1.4.6 Beispiel.

Wir zeigen nun wie man mithilfe von komplexer Analysis $\int_0^\infty \frac{1-\cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$ leicht ausrechnen kann. Zuerst einmal folgt mithilfe der eulerschen Identität $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, dass der Integrand geschrieben werden kann als $\frac{1-\cos x}{x^2} = \operatorname{Re} \frac{1-e^{ix}}{x^2}$. Damit folgt für das Integral unter Ausnutzung der Symmetrie des Integranden

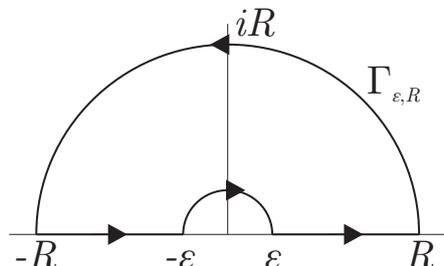


Abbildung 5: Ein Weg durch die komplexe Ebene, der die Null nicht mit einschließt.

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{Re} \frac{1-e^{ix}}{x^2} dx = \operatorname{Re} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz,$$

wobei $f(z) := \frac{1}{2} \frac{1-e^{iz}}{z^2}$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Das bedeutet das Integral über einen geschlossenen Weg verschwindet. Der von uns gewählte Weg ist in Abbildung 5 dargestellt. Da dieser Weg die Null ausspart gilt

$$0 = \int_{\Gamma_{\epsilon,R}} f(z) dz = \int_{-R}^{-\epsilon} f + \int_{\epsilon}^R f + \int_{C_{\epsilon}} f + \int_{C_R} f.$$

Daraus folgt dann

$$\Rightarrow \int_{-R}^{-\epsilon} f + \int_{\epsilon}^R f = - \int_{C_{\epsilon}} f - \int_{C_R} f.$$

Wir betrachten nun den Betrag des Integrals über den großen Kreisbogen C_R , die Parametrisierung für diesen lautet $z(t) = Re^{it}$, $t \in [0, \pi]$. Wir schätzen ab mit

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{1-e^{iz}}{z^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{1-e^{iz(t)}}{R^2 e^{2it}} i R e^{it} dt \right| \\ &\leq \left| \int_0^\pi \frac{2}{R^2} R dt \right| \\ &= \frac{2\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Das Integral über den großen Kreisbogen verschwindet also für große R . Für das Integral des kleinen Kreisbogens drehen wir zunächst die Durchlaufrichtung um,

$$- \int_{C_{\epsilon}} f = \int_{C_{\epsilon}^-} f$$

und fügen eine Null ein:

$$\begin{aligned}
 \int_{C_\epsilon^-} f &= \frac{1}{2} \int_{C_\epsilon^-} \frac{1 - iz + (iz - e^{iz})}{z^2} dz \\
 &= -\frac{i}{2} \int_{C_\epsilon^-} \frac{1}{z} dz + \frac{1}{2} \int_{C_\epsilon^-} \underbrace{\frac{1 + iz - e^{iz}}{z^2}}_{=:E(z)} dz \\
 &= -\frac{i}{2} \pi i + \frac{1}{2} \int_{C_\epsilon^-} E(z) dz \\
 &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \int_{C_\epsilon^-} E(z) dz.
 \end{aligned}$$

Da $E(z)$ auf dem Einheitskreis beschränkt ist, folgt

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{2} \int_{C_\epsilon^-} E(z) dz \right| \leq \frac{1}{2} \sup_{z \in \mathbb{D}} |E(z)| \pi \epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Damit ist der Wert des Integrals $\int_0^\infty \frac{1 - \cos x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}$.

1.4.7 Theorem. Cauchy's Integralformel

Sei f holomorph in Ω , C ein Kreis mit $D \subset \Omega$ und $\partial D = C$. Dann gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

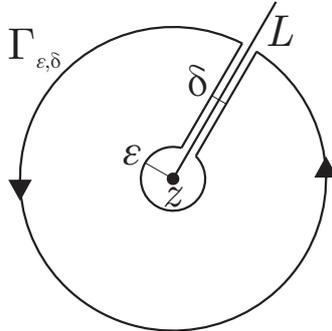


Abbildung 6: F ist auf der geschlitzten Ebene $\mathbb{C} \setminus L$ holomorph.

Beweis. Es sei $F := \frac{f(\xi)}{\xi - z}$ holomorph in $\mathbb{C} \setminus L = \Omega$ (vgl. Abb. 6). Dann verschwindet das Integral über einen geschlossenen Weg, $\int_{\Gamma_{\epsilon, \delta}} F(\xi) d\xi = 0$. Für $\delta \rightarrow 0$ gelte $\Gamma_{\epsilon, \delta} \rightarrow \Gamma_\epsilon$. Nun wird:

$$\int_{\Gamma_\epsilon} F(\xi) d\xi = 0 = \int_C F(\xi) d\xi + \int_{-C_\epsilon} F(\xi) d\xi = \int_C F(\xi) d\xi - \int_{C_\epsilon} F(\xi) d\xi$$

Es folgt:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} F(\xi) d\xi \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \underbrace{\left(\frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} + \frac{f(z)}{\xi - z} \right)}_{\xrightarrow{(*)} 0} d\xi \\
 &= \frac{f(z)}{2\pi i} \int_{C_\epsilon} \frac{d\xi}{\xi - z} \\
 &= \frac{f(z)}{2\pi i} 2\pi i = f(z)
 \end{aligned}$$

Dabei gilt (*) im Grenzfall $\epsilon \rightarrow 0$, denn:

$$\left| \int_{C_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\xi \in D} \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| 2\pi\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0$$

□

1.4.8 Korollar.

Sei f holomorph auf Ω . Dann hat f unendlich viele (komplexe) Ableitungen in Ω und es gilt für einen geschlossenen Weg C um $z \in \Omega$:

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

Beweis. Führe vollständige Induktion über n :

1. Für $n = 0$ gilt nach 1.4.7

$$f^{(0)}(z) = f(z) = \frac{0!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^1} d\xi$$

2. Für den Schritt $n \mapsto n+1$ ergibt sich aufgrund der Kompaktheit von C (Ableitung und Integration vertauschen):

$$\begin{aligned}
 f^{(n+1)}(z) &= \frac{d}{dz} f^{(n)}(z) = \frac{d}{dz} \left(\frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi \right) \\
 &= \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{d}{dz} \left(\frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} \right) d\xi \\
 &= -(-1) \frac{n!(n+1)}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi \\
 &= \frac{(n+1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+2}} d\xi
 \end{aligned}$$

□

1.4.9 Korollar.

Sei f holomorph auf $\Omega \subset \mathbb{C}$ und die Kreisscheibe \bar{D} mit Mittelpunkt z_0 und Radius R komplett in Ω . Bezeichne $C = \partial D$ den Rand von D . Dann gilt mit der Definition $\|f\|_C := \sup_{z \in C} |f(z)|$:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{R^n} \|f\|_C$$

Beweis. Sei die Kreislinie um z_0 parametrisiert durch $\xi(t) = z_0 + Re^{it}$ für $t \in [0, 2\pi]$.

$$\begin{aligned} |f^{(n)}(z_0)| &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{(z_0 + Re^{it} - z_0)^{n+1}} \xi'(t) dt \right| \\ &= \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + Re^{it})}{(Re^{it})^{n+1}} iRe^{it} dt \right| \\ &\leq \frac{n!}{2\pi} \sup_{t \in [0, 2\pi]} |f(z_0 + Re^{it})| \frac{1}{R^n} \int_0^{2\pi} dt \\ &= \frac{n!}{R^n} \|f\|_C \end{aligned}$$

□

1.4.10 Theorem.

Sei f holomorph auf Ω und D eine Kreisscheibe mit Mittelpunkt z_0 und $\bar{D} \subset \Omega$. Dann lässt sich f in eine Potenzreihe um z_0 entwickeln, sodass

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

für alle $z \in D$ und mit $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$

Beweis. Bezeichne $C = \partial D$ den Rand von D . Da C kompakt ist, vertauschen Grenzwertbildung und Integral. Es folgt unter Verwendung der geometrischen Reihe:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n \frac{d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=0}^{\infty} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} (z - z_0)^n d\xi \\ \Rightarrow a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{aligned}$$

□

1.4.11 Definition.

Eine Funktion f heißt *entire* oder *ganz*, wenn sie auf ganz \mathbb{C} holomorph ist.

1.4.12 Korollar. Liouville's Theorem

Wenn f entire und beschränkt ist, so ist f auch konstant.

Beweis. Seien $z_0 \in \mathbb{C}$ und $R \in [0, \infty)$ beliebig. Sei R der Radius eines Kreises um z_0 , dessen Rand mit C bezeichnet werde. Sei wiederum $\|f\|_C := \sup_{z \in C} |f(z)| \leq M \in \mathbb{R}$ (da f beschränkt). Zeige nun, dass $f'(z_0) = 0$ gelten muss:

$$|f'(z_0)| \leq \frac{\|f\|_C}{R} \leq \frac{M}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Da R beliebig war und deshalb $|f'(z_0)| = 0$, muss f konstant sein. \square

1.4.13 Korollar.

Jedes nicht-konstante Polynom

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$$

mit komplexen Koeffizienten a_i ($i = 1, \dots, n$) hat mindestens eine komplexe Nullstelle.

Beweis. Angenommen, $p(z)$ hat keine Nullstelle, dann ist $1/p(z)$ beschränkt. Schreibe dann:

$$\frac{p(z)}{z^n} = a_n + \underbrace{\frac{a_{n-1}}{z} + \dots + \frac{a_0}{z^n}}_{\xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0}$$

Also gilt beispielsweise:

$$\left| \frac{p(z)}{z^n} \right| \geq \frac{|a_n|}{2} \quad \forall |z| \geq R \text{ mit } R \text{ groß genug}$$

Das bedeutet aber:

$$\begin{aligned} |p(z)| &\geq \frac{1}{2} |z|^n |a_n| \quad \text{für } |z| \geq R \\ \Leftrightarrow \frac{1}{|p(z)|} &\leq \frac{2}{|a_n|} \frac{1}{|z|^n} \leq \frac{2}{|a_n|} \frac{1}{R^n} |z| \geq R \\ &\Leftrightarrow 1/p(z) \text{ beschränkt auf } \mathbb{C} \Rightarrow p(z) = \text{const.} \end{aligned}$$

Dies ist aber ein Widerspruch, weswegen p mindestens eine Nullstelle haben muss. \square

1.4.14 Korollar. Hauptsatz der Algebra

Jedes Polynom vom Grad $n \geq 1$ hat exakt n Nullstellen in \mathbb{C} , also gibt es ω_i ($i = 1, \dots, n$), sodass

$$p(z) = a_n (z - \omega_1)(z - \omega_2) \cdot \dots \cdot (z - \omega_n)$$

Beweis. p hat mindestens eine Nullstelle ω_1 , also $p(\omega_1) = 0$. Damit kann man dann schreiben:

$$\begin{aligned} p(z - \omega_1 + \omega_1) &= a_n(z - \omega_1 + \omega_1)^n + \dots + a_0 \\ &= b_n(z - \omega_1)^n + b_{n-1}(z - \omega_1)^{n-1} + \dots + b_1(z - \omega_1) + b_0 \end{aligned}$$

Da aber $p(\omega_1) = 0$ folgt direkt $b_0 = 0$ und damit

$$p(z) = (z - \omega_1)Q(z),$$

wobei der Grad von Q genau $n - 1$ ist. Nun hat Q aber mindestens eine Nullstelle usw. (induktiv findet man also, dass p genau n Nullstellen hat) \square

1.4.15 Theorem.

Sei f eine holomorphe Funktion auf Ω , die auf einer Menge $M \subset \Omega$ mit Häufungspunkt verschwindet. Dann gilt $f = 0$ auf ganz Ω .

Beweis. Wähle eine konvergente Folge $(\omega_n)_{n=1}^\infty \subset \Omega$ mit $(\omega_n) \rightarrow \omega$, sodass $f(\omega_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Diese existiert nach *Bolzano-Weierstrass* und den Voraussetzungen.) Da f holomorph in Ω , existiert eine Kreisscheibe D , sodass für alle $z \in D$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - \omega)^n.$$

Angenommen, $f(z) \neq 0$, so existiert ein $n \in \mathbb{N}_0$, sodass $a_n \neq 0$. Da f stetig ist, folgt:

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} (0) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(\omega_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} (\omega_n)\right) = f(\omega) \Rightarrow a_0 = 0$$

Daher folgt

$$f(z) = a_m(z - \omega)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_{k+m}}{a_m} (z - \omega)^k = (z - \omega)^m (1 + g(z - \omega)),$$

wobei m kleinstmöglich, sodass $a_m \neq 0$ und $g(z - \omega) \xrightarrow{z \rightarrow \omega} 0$ holomorph ist. Da nun aber $(\omega_n)_{n=1}^\infty \rightarrow \omega$, gibt es ein k_0 , sodass für alle $k \geq k_0$

$$1 + \underbrace{g(\omega_k - \omega)}_{\rightarrow 0} \neq 0.$$

Also ist

$$0 = f(\omega_k) = a_n \underbrace{(\omega_k - \omega)^m}_{\neq 0} \underbrace{(1 + g(\omega_k - \omega))^m}_{\neq 0}$$

Dies ist aber ein Widerspruch, da ein $a_n \neq 0$ existiert, also gilt $f(z) = 0$ für alle $z \in D$. Dehne diesen Geltungsbereich nun induktiv aus (dies ist möglich, da Ω ein Gebiet und daher auch wegzusammenhängend ist, vgl. Abb.7). \square

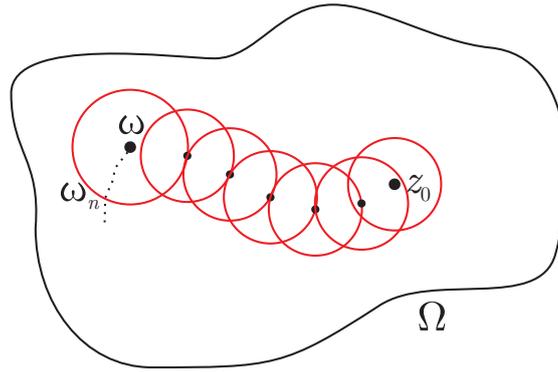


Abbildung 7: Man findet induktiv Kreise, deren Mittelpunkte auf einem Weg von ω zu einem beliebigen $z_0 \in \Omega$ liegen.

1.4.16 Korollar.

Seien f, g holomorph auf Ω und $f = g$ auf einer Menge mit Häufungspunkt. Dann gilt $f = g$ auf ganz Ω .

Beweis. Folgt wegen $h := f - g$ (holomorph) sofort. □

1.4.17 Theorem. Morera

Sei f auf einer offenen Kreisscheibe D stetig, sodass für alle Dreiecke $T \subset D$ das Integral über den Rand verschwindet, also $\int_T f = 0$. Dann ist f holomorph in D .

Beweis. Wegen $\int_T f = 0$ existiert eine Stammfunktion F mit $F'(z) = f(z)$. Daher ist f unendlich oft differenzierbar und holomorph. □

1.4.18 Theorem.

Sei $(f_n(z))_{n=1}^\infty$ eine Folge holomorpher Funktionen, die auf jeder kompakten Teilmenge Ω *gleichmäßig* gegen $f(z)$ konvergiert. Dann ist $f(z)$ holomorph.

Merke: Der gleichmäßige Limes holomorpher Funktionen ist holomorph. (gilt im Reellen *nicht!*)

Beweis. Zeige, dass das Integral über alle Dreiecke verschwindet:

Da f_n holomorph, gilt

$$\int_T f_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Wegen der Kompaktheit von T und da $(f_n) \rightarrow f$ gleichmäßig vertauschen Grenzübergang $k \rightarrow \infty$ und die Integration, also

$$0 = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_T f_k = \int_T f$$

Da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen wieder stetig ist, gilt der Satz von Morera (vgl. Abschnitt 1.4.17), also ist f holomorph in Ω . \square

1.4.19 Korollar.

Sei f stetig auf einem Kreis $C = \partial D$. Dann ist

$$g(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

holomorph in D .

Beweis.

$$F_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^n \frac{f(\xi_j)}{\xi_j - z} (\xi_j - \xi_{j-1})$$

ist holomorph und konvergiert gleichmäßig gegen g . \square

1.5 Meromorphe Funktionen

1.5.1 Definition.

Eine Funktion $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ heißt *meromorph*, wenn sie holomorph bis auf endlich (abzählbar) viele Pole ist. Dann gilt für das Integral entlang einer geschlossenen Kurve

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{i=1}^N \operatorname{res}_{z_i} f,$$

wobei res_{z_i} das Residuum von f an der Polstelle z_i bezeichnet.

1.5.2 Definitionen.

Da die Begriffe *Residuum* und *Polstelle* bisher noch unbekannt sind, beschäftigen wir uns zunächst mit diesen.

- (a) Punktsingularität: z_0 ist Punktsingularität von f , wenn f in einer Umgebung von z_0 definiert ist aber nicht in z_0 .
- (b) Nullstelle: z_0 ist Nullstelle, wenn $f(z_0) = 0$.
- (c) „deleted neighborhood“ (punktierte Umgebung) um z_0 : $D_r(z_0) \setminus \{z_0\} = \{z \mid 0 < |z - z_0| < r\}$.
- (d) Polstelle: f besitzt eine Polstelle bei z_0 , wenn $\frac{1}{f}$ mit $\frac{1}{f}(z_0) := 0$ holomorph ist in $D_r(z_0)$ mit geeignetem r .

1.5.3 Beispiel.

Nun einige Beispiele zu den obigen Definitionen:

- (a) $f(z) = z$ für $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat eine Punktsingularität in 0 aber mit $f(0) := 0$ ist f holomorph.

(b) $g(z) = \frac{1}{z}$ ist definiert auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ und es ist $|g(z)| \xrightarrow{z \rightarrow 0} \infty$. Definiere analog zu (a) $f(z) = \frac{1}{g(z)}$ mit $f(0) := 0$, f ist dann holomorph.

(c) $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$ verhält sich unterschiedlich in einer Umgebung von Null, je nachdem aus welcher Richtung man kommt:

$$x \searrow 0 : f(x) = e^{-\frac{1}{x}} \rightarrow 0$$

$$x \nearrow 0 : f(x) = e^{\frac{1}{|x|}} \rightarrow \infty$$

$$y \rightarrow 0 : f(iy) = e^{-\frac{1}{iy}} = e^{\frac{i}{y}} \text{ oszilliert.}$$

Die Funktion $e^{-\frac{1}{z}}$ bildet jede Umgebung von Null, $U_\epsilon(0)$, dicht in ganz \mathbb{C} ab.

1.5.4 Bemerkung.

Nullstellen einer holomorphen Funktion sind isoliert. Wenn $f(z_0) = 0$, dann gibt es eine Umgebung U von z_0 , sodass $f \neq 0$ in $U \setminus \{z_0\}$.

1.5.5 Theorem.

Sei f holomorph in Ω und habe f eine Nullstelle $z_0 \in \Omega$, $f \neq 0$ in Ω . Dann gibt es eine Umgebung U von z_0 und eine nicht verschwindende Funktion g auf U sowie eine eindeutige Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$f(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

auf U . z_0 ist Nullstelle n -ter Ordnung.

Beweis. Es ist nach Voraussetzung $f(z_0) = 0$. f lässt sich in D_{z_0} in eine Potenzreihe entwickeln,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ für } z \in D_{z_0}.$$

Es gibt eine Umgebung U von z_0 , sodass $f(z) \neq 0$ in $U \setminus \{z_0\}$. Da $f(z_0) = 0$ ist der erste Koeffizient der Reihenentwicklung $a_0 = 0$. n sei kleinste Zahl, sodass $a_n \neq 0$. Dann gilt

$$f(z) = (z - z_0)^n \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^k =: (z - z_0)^n g(z),$$

wobei $g(z) \neq 0$ nach Voraussetzung. n bezeichnet die Ordnung der Nullstelle, Nullstellen 1. Ordnung nennt man einfach. □

1.5.6 Theorem.

Wenn f eine Polstelle bei z_0 hat, dann existiert eine Umgebung U von z_0 und eine nicht verschwindende Funktion $h(z)$ sowie eine eindeutige Zahl $n \in \mathbb{N}$, sodass

$$f(z) = (z - z_0)^{-n} h(z) \text{ für } z \in U.$$

n ist die Ordnung der Polstelle.

Beweis. Da z_0 Polstelle von f ist gilt: z_0 ist Nullstelle von $\frac{1}{f}$ und $\frac{1}{f}$ ist holomorph in U . Also gilt

$$\begin{aligned}\frac{1}{f}(z) &= (z - z_0)^n g(z) \text{ mit } g(z) \neq 0 \text{ in } U \\ \Rightarrow f(z) &= (z - z_0)^{-n} \frac{1}{g(z)} = (z - z_0)^{-n} h(z).\end{aligned}$$

□

1.5.7 Theorem.

Wenn f eine Polstelle bei z_0 hat, dann gibt es eine Umgebung U von z_0 , sodass

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z - z_0)^{n+1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + G(z)$$

mit $G(z)$ holomorph in U . Dabei nennt man a_{-1} das Residuum von f an der Stelle z_0 : $a_{-1} := \text{res}_{z_0} f$.

Beweis. Da z_0 Polstelle von f ist, hat $\frac{1}{f}$ eine Nullstelle bei z_0 und man kann für $\frac{1}{f}$ schreiben

$$\Rightarrow \frac{1}{f}(z) = (z - z_0)^n g(z)$$

mit $g(z) \neq 0$ in einer Umgebung von z_0 . Jetzt kann man invertieren und erhält

$$\Rightarrow f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^n} h(z)$$

mit $h(z)$ holomorph in einer Umgebung von z_0 . Da $h(z)$ holomorph in einer Umgebung von z_0 , kann man $h(z)$ in eine Potenzreihe entwickeln und erhält

$$\begin{aligned}f(z) &= \frac{1}{(z - z_0)^n} \left(A_0 + A_1(z - z_0) + A_2(z - z_0)^2 + \dots \right) \\ &= \frac{A_0}{(z - z_0)^n} + \frac{A_1}{(z - z_0)^{n-1}} + \dots + \frac{A_{n-1}}{(z - z_0)} + G(z),\end{aligned}$$

mit $G(z)$ holomorph in einer Umgebung von z_0 . Nun kann man sich noch andere Koeffizienten definieren, $a_{-n} := A_0, a_{-1} := A_{n-1}$ und erhält was zu beweisen war. □

Die Summe $P(z) = \frac{a_{-n}}{(z - z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)}$ nennt man Hauptteil, a_{-1} nennt man Residuum. Weshalb man a_{-1} Residuum nennt wird klar, betrachtet man ein Wegintegral entlang eines Kreises um z_0 . Dessen Parametrisierung lautet $C_{z_0} : z(t) = z_0 + \delta e^{it}$ mit $\delta > 0$. Das Integral ist dann

$$\int_{C_{z_0}} f(z) dz = \int_{C_{z_0}} P(z) dz + \underbrace{\int_{C_{z_0}} G(z) dz}_{=0}$$

wobei das Integral über $G(z)$ verschwindet, da die Funktion holomorph in einer Umgebung von z_0 ist. Da $P(z)$ eine Summe ist, kann man gliedweise integrieren. Wir führen hier die Integration für den n -ten Term durch, daran kann man alle übrigen ablesen:

$$\begin{aligned} \int_{C_{z_0}} \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} dz &= a_{-n} \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\delta e^{it})^n} i\delta e^{it} dt \\ &= ia_{-n} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it(1-n)}}{\delta^{n-1}} dt \\ &= \begin{cases} 0 & n \neq 1 \\ 2\pi ia_{-n} & n = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Also verschwinden alle Terme der Summe $P(z)$ bis auf den mit a_{-1} :

$$\int_{C_{z_0}} f(z) dz = \int_{C_{z_0}} P(z) dz = 2\pi ia_{-1}.$$

Wenn z_0 nun ein Pol 1. Ordnung ist, so ist $n = 1$ und man kann schreiben

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + G(z) \quad \Rightarrow \quad a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z-z_0)f(z).$$

1.5.8 Theorem.

Wenn f bei z_0 einen Pol n -ter Ordnung hat, dann gilt

$$a_{-1} = \operatorname{res}_{z_0} f = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z-z_0)^n f(z)).$$

Beweis. Multipliziert man f mit $(z-z_0)^n$ so ergibt sich

$$(z-z_0)^n f(z) = a_{-n} + (z-z_0)a_{-n+1} + \dots + a_{-1}(z-z_0)^{n-1} + (z-z_0)^n G(z).$$

Leitet man diesen Term nun gliedweise $(n-1)$ -mal ab, so erhält man

$$\left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z-z_0)^n f(z)) = (n-1)! a_{-1} + \underbrace{\left(\frac{d}{dz} \right)^{n-1} ((z-z_0)^n G(z))}_{\rightarrow 0 \text{ für } z \rightarrow z_0}$$

und daraus folgt die Behauptung. □

1.5.9 Theorem. Residuensatz

Sei f holomorph in Ω bis auf eine Polstelle $z_0 \in D$, $\partial D = C \subset \Omega$ sei Kreis in Ω . Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z_0} f.$$

Beweis. f hat eine Polstelle in z_0 . Dann gibt es eine Umgebung U von z_0 , sodass $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n} h(z)$ mit $h(z)$ holomorph. Entwickle dann $h(z)$ in eine Potenzreihe,

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + G(z) \quad \forall z \in U.$$

Nun legen wir einen „toy-contour“-Weg entlang C und um z_0 (ähnlich Abbildung 6). Da dieser geschlossen ist und über eine holomorphe Funktion geht sowie keine Singularitäten beinhaltet gilt

$$\int_{\Gamma_{\delta,\epsilon}} f(z) dz = 0 = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\delta,\epsilon}} f(z) dz = \int_C f(z) dz - \int_{C_\epsilon} f(z) dz.$$

Also folgt

$$\Rightarrow \int_C f(z) dz = \int_{C_\epsilon} f(z) dz = \int_{C_\epsilon} \left[\frac{a_{-n}}{(z-z_0)^n} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + G(z) \right] dz = 2\pi i a_{-1}.$$

□

1.5.10 Korollar.

Sei f holomorph in Ω bis auf Pole $\{z_1, \dots, z_N\} \subset D$ und D Kreisscheibe in Ω mit $\partial D = C \subset \Omega$. Dann gilt

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{l=1}^N \text{res}_{z_l} f.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt analog zu 1.5.9, nur mit N -fachem Schlüsselloch-Weg:

$$\int_C f(z) dz = \sum_{l=1}^N \int_{C_\epsilon^l} f(z) dz = 2\pi i \sum_{l=1}^N \text{res}_{z_l} f.$$

□

1.5.11 Korollar.

Sei f holomorph in Ω bis auf Pole z_1, \dots, z_N innerhalb des „toy-contour“-Wegs γ , $\gamma \subset \Omega$. Dann gilt

$$\int_\gamma f(z) dz = 2\pi i \sum_{l=1}^N \text{res}_{z_l} f.$$

1.5.12 Beispiel.

Wir berechnen das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi$ mithilfe des Residuensatzes. Zuerst untersuchen wir $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ auf Polstellen in der komplexen Ebene. Man findet sofort $z = \pm i$. Diese Pole sind beide von erster Ordnung und man kann daher für das Residuum schreiben

$$\text{res}_{z_l} f = \lim_{z \rightarrow z_l} (z - z_l) f(z).$$

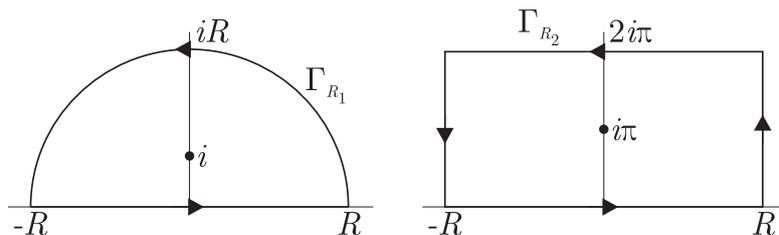


Abbildung 8: Zwei Wege durch die komplexe Ebene, die jeweils nur eine Polstelle einschließen.

Wir legen uns nun einen Weg durch die komplexe Ebene, der nur einen Pol mit einschließt: Wir gehen von Null zu R auf der reellen Achse, von dort aus im Halbkreis über die obere Halbebene nach $-R$ und wieder zurück zur Null. Bezeichne Γ_{R_1} diesen Weg, vgl. Abbildung 8. Das Integral über diesen Weg ist dann

$$\int_{\Gamma_{R_1}} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_i f,$$

da wir nur den Pol bei $z = i$ umfahren. Das Residuum an dieser Stelle ist

$$\operatorname{res}_i f = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{1+z^2} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{z-i}{(z-i)(z+i)} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{1}{z+i} = \frac{1}{2i}.$$

Also ist

$$\frac{2\pi i}{2i} = \pi = \int_{\Gamma_{R_1}} f(z)dz = \int_{-R}^R f(z)dz + \int_{C_R} f(z)dz,$$

wobei C_R den halben Kreisbogen mit Radius R bezeichnet. Dessen Parametrisierung lautet $C_R : z(t) = Re^{it}, t \in [0, \pi]$. Wir setzen diese ein und erhalten

$$\int_{C_R} f(z)dz = \int_0^\pi \frac{iRe^{it}}{1+R^2e^{2it}} dt.$$

Um den Betrag abschätzen zu können führen wir eine Nebenrechnung durch:

$$|1+R^2e^{2it}| = |e^{-2it} + R^2| \geq |R^2 - 1| \stackrel{R \geq \sqrt{2}}{\geq} \frac{1}{2}R^2.$$

Damit schätzen wir ab und erhalten

$$\left| \int_{C_R} f(z)dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{|1+R^2e^{2it}|} dt \leq \frac{2R}{R^2} \int_0^\pi dt = \frac{2\pi}{R} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Also verschwindet das Integral über den halben Kreisbogen für den Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ und der Wert des Kurvenintegrals über Γ_{R_1} ist gleich dem über die reelle Achse:

$$\Rightarrow \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_{R_1}} f(z)dz = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(z)dz = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

1.5.13 Beispiel.

Als zweites Beispiel zur Demonstration der Residuenmethode zeigen wir, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx = \frac{\pi}{\sin(\pi a)} \quad \text{für } 0 < a < 1.$$

Zunächst definiere eine komplexe Funktion $f(z) = \frac{e^{az}}{1+e^z}$. Für Polstellen betrachte eine Nullstelle von $\frac{1}{f}$, $1+e^z = 0$. Dies liefert $z = i(\pi + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. Die Polstellen befinden sich also alle auf der imaginären Achse, bei ungeradzahligem Vielfachen von $i\pi$. Wir legen nun wieder einen Weg durch die komplexe Ebene, der nur eine Polstelle mit einschließt. Sei Γ_{R_2} der Weg entlang des Rechtecks, das durch die Punkte $R, 2\pi iR, -2\pi iR$ und $-R$ festgelegt ist, vgl. Abbildung 8. Dann ist nur eine Polstelle bei $i\pi$ eingeschlossen. Das Residuum dort ist

$$\lim_{z \rightarrow i\pi} (z - i\pi) \frac{e^{az}}{1+e^z} = \lim_{z \rightarrow i\pi} \frac{e^{az}}{\frac{e^z - e^{i\pi}}{z - i\pi}} = \frac{e^{ai\pi}}{(e^z)'(i\pi)} = \frac{e^{ai\pi}}{e^{i\pi}} = -e^{ai\pi}.$$

Mithilfe des Residuensatzes folgt

$$\int_{\Gamma_{R_2}} f(z) dz = -2\pi i e^{ai\pi}.$$

Dabei setzt sich Γ_{R_2} aus vier Teilstrecken zusammen, eine auf der reellen Achse, eine parallel zur reellen Achse auf der Höhe $2\pi i$ sowie zwei Stücke an den Seiten. Das Integral über das Teilstück der reellen Achse sei bezeichnet mit I_R , das parallel zur reellen Achse mit I'_R . Es ist also

$$\int_{\Gamma_{R_2}} f(z) dz = I_R + I'_R + \text{Seitenintegrale} = -2\pi i e^{ai\pi}.$$

Als Parametrisierung für I'_R wähle $z(t) = 2i\pi + t$, $t \in [-R, R]$. Das Integral ist dann

$$I'_R = - \int_{-R}^R \frac{e^{a(2\pi i+t)}}{1+e^{2\pi i+t}} dt = - \int_{-R}^R \frac{e^{2\pi ia} e^{at}}{1+e^{2\pi i} e^t} dt = -e^{2\pi ia} I_R,$$

denn das Integral über das Teilstück der reellen Achse I_R ist

$$I_R = \int_{-R}^R \frac{e^{ax}}{1+e^x} dx.$$

Also ist

$$\int_{\Gamma_{R_2}} f(z) dz = I_R(1 - e^{2\pi ia}) + \text{Seitenintegrale} = -2\pi i e^{ai\pi}.$$

Für die Beträge der Seitenintegrale ergibt sich beispielhaft für den rechten Teil mit einer Parametrisierung $z(t) = R + it$, $t \in [0, 2\pi]$

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{e^{a(R+it)}}{1+e^{R+it}} dt \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{|1+e^R e^{it}|} dt \leq 2 \int_0^{2\pi} \frac{e^{aR}}{e^R} dt = e^{(a-1)R} 4\pi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0,$$

da $0 < a < 1$. Es wurde zudem verwendet, dass gilt $|1+x| \geq \frac{1}{2}|x|$ für $|x|$ groß genug. Das Integral auf der linken Seite lässt sich analog abschätzen und verschwindet für $R \rightarrow \infty$. Also ergibt sich insgesamt

$$I_R = \frac{-2\pi i e^{ai\pi}}{1 - e^{2ai\pi}} = -2\pi i \frac{e^{ai\pi}}{e^{ai\pi}(e^{-ai\pi} - e^{ai\pi})} = \frac{2\pi i}{e^{ai\pi} - e^{-ai\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\pi a)}.$$

1.5.14 Beispiel. Dirichlet-Problem

Wir betrachten eine auf der Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} | 0 \leq |z| \leq \rho\}$ für $\rho < 1$ holomorphe Funktion u . Wir nehmen an, dass $u = u_0(t)$ auf dem Rand vorgegeben und dass u zusätzlich am Rand noch stetig ist. Nun soll die stationäre Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{D} \quad (1)$$

gelöst werden. Dafür sind die folgenden drei Schritte notwendig:

1. Zeige zunächst

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) d\varphi. \quad (2)$$

Man erhält nun wegen

$$\operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} - \frac{e^{i\varphi} + 1/\bar{z}}{e^{i\varphi} - 1/\bar{z}} \right)$$

folgende Darstellung:

$$\begin{aligned} ? &= \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{2} \left(\frac{e^{i\varphi} + z}{e^{i\varphi} - z} - \frac{e^{i\varphi} + 1/\bar{z}}{e^{i\varphi} - 1/\bar{z}} \right) f(e^{i\varphi}) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\underbrace{\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z}}_A + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{z - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - z}}_C - \underbrace{\frac{e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - 1/\bar{z}}}_B - \underbrace{\frac{1}{2} \frac{1/\bar{z} - e^{i\varphi}}{e^{i\varphi} - 1/\bar{z}}}_D \right] f(e^{i\varphi}) d\varphi \end{aligned}$$

- Mit dem *Cauchy*'schen Integralsatz erhält man direkt, dass $1/(2\pi) \int_0^{2\pi} A f(e^{i\varphi}) d\varphi = f(z)$.
- Für B ergibt sich leicht, dass $\int_{\partial\mathbb{D}} B = 0$ ist, weil B innerhalb von \mathbb{D} keine Pole hat.
- Offensichtlich ist aber auch $C + D = 0$.

Damit ist (2) gezeigt. Durch Umformungen erhält man aus (2) dann mit $z = e^{i\theta}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) P_r(\varphi - \theta) d\varphi,$$

wobei P_r den *Poisson*-Kern bezeichnet, welcher durch

$$P_r(\gamma) = \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r \cos(\gamma)}$$

gegeben ist.

- Die Formel gilt auch, wenn f holomorph auf \mathbb{D} und stetig auf $\overline{\mathbb{D}}$, da das Integral für festes z auch für $\rho \rightarrow 1$ konvergiert.
- Es gelte nun $u = \operatorname{Re} f$ mit einer auf \mathbb{D} holomorphen Funktion f . u erfülle $\Delta u = 0$ wie in (1) und $u = u_0$ sei am Rand stetig. Es gilt

$$g(z) = 2 \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) u(x, y)$$

Wegen $(\partial_{\bar{z}} f = 0) \Rightarrow f$ holomorph folgt daraus:

$$\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 2 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} u = 2 \Delta u = 0$$

$\Rightarrow g$ holomorph $\Rightarrow \exists F$ mit $F' = g$.

Bemerkung. Sei $u = \operatorname{Re} f$, dann gilt $f' = g$, also $f = F + c$ (ist Realteil einer komplexen Funktion). Da aber

$$\begin{aligned} f(re^{i\theta}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\varphi}) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \\ &= u(r, \theta) + iv(r, \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(1, \varphi) + iv(1, \varphi)) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi + i \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(1, \varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi \end{aligned}$$

Daher gilt

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(1, \varphi) P_r(\varphi - \theta) d\varphi,$$

also kann man eine Lösung für u finden.

1.6 Singularitäten

1.6.1 Definition.

Sei f holomorph in Ω bis auf einen Punkt $z_0 \in \Omega$. Wenn man $f(z_0)$ so definieren kann, dass f holomorph in Ω wird, dann nennt man z_0 *behebbar* Singularität.

1.6.2 Theorem. Riemann's Theorem

Sei f holomorph in Ω bis auf einen Punkt $z_0 \in \Omega$. Wenn f beschränkt ist in $\Omega \setminus \{z_0\}$, dann ist z_0 eine behebbar Singularität. Dies ist eine besondere Eigenschaft komplexer Funktionen und gilt *nicht* im \mathbb{R}^n .

Beweis. Der Beweis wird analog zu 1.4.7 geführt. Es ist zu zeigen, dass man schreiben kann

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \quad \forall z \neq z_0 \text{ innerhalb von } C.$$

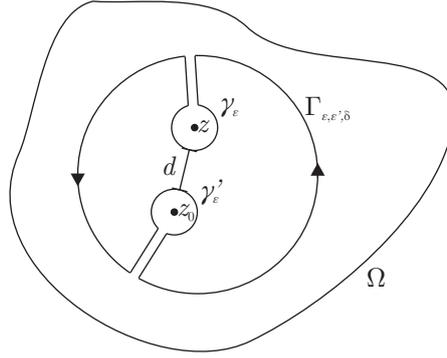


Abbildung 9: Ein Weg, der sowohl z als auch z_0 umfährt. Dabei ist der Abstand d mindestens $\frac{1}{2}|z - z_0|$ groß.

Mit $f(z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$ wird f holomorph in Ω . Wir wählen unseren Weg $\Gamma_{\epsilon, \epsilon', \delta}$ so, dass er sowohl z als auch z_0 umfährt (vgl. Abbildung 9) und damit nur auf einer holomorphen Funktion definiert ist. Dabei soll der Abstand der beiden Kreise um z und z_0 mindestens $\frac{1}{2}|z - z_0|$ betragen. Nun lassen wir δ gegen Null gehen und erhalten dadurch drei Integrale über Kreise:

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\Gamma_{\epsilon, \epsilon', \delta}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Gamma_{\epsilon, \epsilon', \delta}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\
 &= \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \\
 \Rightarrow \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \underbrace{\int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}_{\textcircled{1}} + \underbrace{\int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi}_{\textcircled{2}}.
 \end{aligned}$$

Dabei kann man für das Integral $\textcircled{1}$ schreiben:

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} &= \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi \\
 &= \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + 2\pi i f(z).
 \end{aligned}$$

Der vordere Term verschwindet im Limes $\epsilon \rightarrow 0$, da f holomorph in z :

$$\left| \int_{\gamma_\epsilon} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \sup_{\xi \in D_\tau} \left| \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} \right| |l(\gamma_\epsilon)| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0.$$

Für den Betrag von $\textcircled{2}$ kann man schreiben

$$|\textcircled{2}| = \left| \int_{\gamma'_\epsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \sup \frac{2|f(\xi)|}{|z - z_0|} |l(\gamma'_\epsilon)| \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} 0,$$

da nach Voraussetzung der Abstand der beiden Kreise um z und z_0 mindestens $\frac{1}{2}|z - z_0|$ beträgt. Es folgt insgesamt

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z) \quad \Rightarrow \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

□

1.6.3 Bemerkung.

Mittels Riemann's Theorem lassen sich Singularitäten klassifizieren.

1.6.4 Korollar.

Habe f bei z_0 eine isolierte Singularität. Dann gilt

$$f \text{ hat einen Pol bei } z_0 \Leftrightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty.$$

Beweis. „ \Rightarrow “: z_0 ist Pol, d.h. $\frac{1}{f(z)}$ hat Nullstelle bei z_0 . $\Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{|f(z)|} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{|f(z)|} < \epsilon \Leftrightarrow |f(z)| > \frac{1}{\epsilon} \Rightarrow \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$.

„ \Leftarrow “: $\frac{1}{f(z)}$ ist holomorph in einer Umgebung von z_0 und $\frac{1}{|f(z)|} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} 0$. Also ist $\frac{1}{f(z)}$ beschränkt in einer Umgebung von z_0 . Nach Riemann's Theorem ist $\frac{1}{f}$ holomorph in $\frac{1}{f(z_0)} = 0$. $\Rightarrow z_0$ ist Pol. □

1.6.5 Definition.

Sei z_0 isolierte Singularität und weder Pol noch hebbbar. Dann nennt man z_0 *wesentliche* Singularität.

1.6.6 Theorem. Casorati-Weierstraß

Sei f holomorph in $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ und habe f wesentliche Singularität bei z_0 . Dann liegt das Bild von $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ dicht in \mathbb{C} .

Beweis. Annahme: $f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\})$ liegt nicht dicht in \mathbb{C} . Dann gibt es ein $\omega_0 \in \mathbb{C}$ und $\epsilon > 0$ sodass $f(D_r(z_0) \setminus \{z_0\}) \subset \mathbb{C} \setminus D_\epsilon(\omega_0)$, denn $\forall \omega_0$ und $\forall \epsilon > 0 \exists \omega : |\omega - \omega_0| < \epsilon$ sodass $\omega = f(z) \forall z \in U_\delta(z_0)$.

Es ist dann $f(z) - \omega_0$ holomorph in $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ und damit natürlich auch $g(z) := \frac{1}{f(z) - \omega_0}$ holomorph in $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$. Nach Riemann's Theorem ist z_0 hebbbare Singularität von g , da g beschränkt ist nach Annahme. $\Rightarrow g$ holomorph in $D_r(z_0)$. Jetzt kann es nur zwei Möglichkeiten geben, beide führen zum Widerspruch:

1. $g(z_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)} = f(z) - \omega_0$ ist holomorph in $D_r(z_0)$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme, dass z_0 wesentliche Singularität von f ist.
2. $g(z_0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{g(z)}$ hat einen Pol bei z_0 und damit auch f . Dies ist auch ein Widerspruch zur Annahme, dass z_0 wesentliche Singularität von f ist.

Somit muss das Gegenteil der Annahme gelten und das Bild von $D_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ liegt dicht in \mathbb{C} . □

1.6.7 Definition.

f ist meromorph in Ω , wenn es eine Folge von Punkten $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ gibt, die keine Häufungspunkte in Ω hat, sodass

- (a) f holomorph in $\Omega \setminus \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$
- (b) f hat Pole bei $\{z_0, z_1, \dots, z_n\}$.

f hat einen Pol bei $z = \infty$, wenn $F(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ einen Pol bei 0 hat.

1.6.8 Beispiel.

Zur Veranschaulichung des nachfolgenden „Argument principle“ zwei konkrete Beispiele.

Betrachte das Integral $\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ für

- (a) $f(z) = az^n$

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_C \frac{naz^{n-1}}{az^n} dz = n \int_C \frac{1}{z} dz = n2\pi i$$

- (b) $f(z) = \frac{a}{z^n}$

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \int_C \frac{-naz^{-(n+1)}}{az^{-n}} dz = -n \int_C \frac{1}{z} dz = -n2\pi i$$

Das Integral über $\frac{f'}{f}$ liefert also Information über die Anzahl an Nullstellen oder Pole einer Funktion.

1.6.9 Theorem. „Argument principle“

Sei f meromorph in Ω und $C \subset \Omega$ ein Kreis (toy-contour) innerhalb Ω . Wenn f keine Nullstellen und Pole auf C hat, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \{\#\text{Nullstellen}\} - \{\#\text{Pole}\},$$

gerechnet mit Vielfachheit.

Beweis. Legt man einen Schlüsselloch-Weg um die Nullstellen und Pole von f , so erhält man, dass das Integral über einen Kreis äquivalent zur Integration über viele kleine Kreise um die Nullstellen/Pole ist (vgl. Abbildung 10):

$$\int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_i \int_{C_i} \frac{f'(z)}{f(z)} dz.$$

- (a) Sei z_l Nullstelle. Dann kann man in einer Umgebung von z_l die Funktion f darstellen durch $f(z) = (z - z_l)^n g(z)$ mit $g(z)$ holomorph und $\neq 0$ in einer Umgebung von z_l . Für $\frac{f'}{f}$ bedeutet das

$$\frac{f'}{f} = \frac{((z - z_l)^n g(z))'}{(z - z_l)^n g(z)} = \frac{n(z - z_l)^{n-1} g(z) + (z - z_l)^n g'(z)}{(z - z_l)^n g(z)} = n \frac{1}{z - z_l} + \frac{g'(z)}{g(z)}.$$

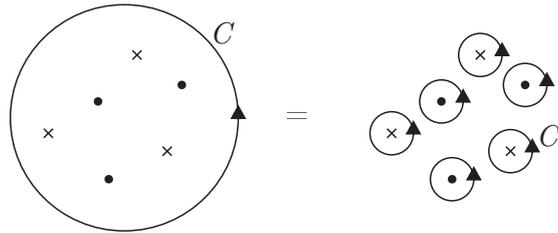


Abbildung 10: Integriert man über einen Kreis C , der Nullstellen (Punkte) und Polstellen (Kreuze) beinhaltet, so genügt es kleine Kreise C_i um besagte Stellen zu integrieren.

Es folgt

$$\int_{C_l} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = n \int_{C_l} \frac{1}{z - z_l} dz + \int_{C_l} \frac{g'(z)}{g(z)} dz = n2\pi i + 0,$$

wobei beim letzten Gleichheitszeichen verwendet wurde, dass g und folglich auch g' holomorph in einer Umgebung von z_l sind.

- (b) Sei z_k Polstelle. Dann kann man in einer Umgebung von z_k für f schreiben $f(z) = (z - z_k)^{-n} h(z)$ mit $h(z)$ holomorph und $\neq 0$ in einer Umgebung von z_k . Analog zu (a) erhält man

$$\frac{f'}{f} = -\frac{n}{z - z_k} + \frac{h'(z)}{h(z)}.$$

Und damit folgt für das Integral

$$\int_{C_k} \frac{f'}{f} dz = -n \int_{C_k} \frac{1}{z - z_k} dz + \int_{C_k} \frac{h'(z)}{h(z)} dz = -n2\pi i.$$

□

1.6.10 Theorem. Rouché's Theorem

Seien f und g holomorph in einer offenen Menge Ω , die den Kreis C beinhaltet. Falls $|f(z)| > |g(z)|$ auf C , dann haben f und $f+g$ die gleiche Anzahl an Nullstellen innerhalb von C .

Beweis. Definiere $f_t(z) := f(z) + tg(z)$ mit $t \in [0, 1]$. Nach dem „Argument principle“ gilt für die Anzahl von Nullstellen von $f_t(z)$ innerhalb von C

$$n_t = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'_t(z)}{f_t(z)} dz.$$

Da $n_t \in \mathbb{N}_0$ genügt es nun zu zeigen, dass n_t stetig ist. Damit ist automatisch $n_1 = n_0$ weil n_t dann nur konstant sein kann. Es ist $(t, z) \mapsto \frac{f'_t(z)}{f_t(z)}$ stetig auf $[0, 1] \times C$, da $f_t(z)$ stetig in Abhängigkeit von (t, z) und $|f_t(z)| > \epsilon$ auf C weil

$$|f_t(z)| = |f(z) + tg(z)| \geq |f(z)| - t|g(z)| \geq \inf_{z \in C} (|f(z)| - t|g(z)|) =: \epsilon.$$

Damit ist n_t stetig in Abhängigkeit von t und damit $n_1 = n_0$. □

1.6.11 Definition. Riemann'sche Sphäre

Die Riemann'sche Sphäre ist die erweiterte komplexe Ebene $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Die Veranschaulichung der Riemann'schen Sphäre liefert die stereographische Projektion $p : S^2 \rightarrow \mathbb{C}_\infty, x \mapsto p(x)$ wobei $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ die Einheitssphäre in \mathbb{R}^3 ist. $p(x)$ ist der Schnittpunkt der Gerade durch den Nordpol der Einheitssphäre $N = (0, 0, 1)$ und $x \in S^2$ mit der Ebene $E_3 := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0\}$. Dieser wird aufgefasst als Punkt auf \mathbb{C}_∞ , dabei ist $p(N) := \infty$. Das bedeutet es gibt nur positive Unendlichkeit auf der Riemann'schen Sphäre.

Für die explizite Formulierung der stereographische Projektion sei $x \in S^2$, dann ist die Gerade durch x und N das Bild von $g(t) = N + (x - N)t$. Der Schnittpunkt mit E_3 wird angenommen wenn

$$0 = (g(t))_3 = 1 + (x_3 - 1)t \Rightarrow t = \frac{1}{1 - x_3}.$$

Also ist die explizite Formulierung der stereographische Projektion

$$p(x) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Die Umkehrabbildung der stereographische Projektion ist $p^{-1} : \mathbb{C}_\infty \rightarrow S^2$. Um die explizite Formulierung von p^{-1} zu finden gehe von $z = z_1 + iz_2 \in \mathbb{C}_\infty$ aus. Es gilt $z = z_1 + iz_2 = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \frac{x_2}{1 - x_3}$, weiterhin gilt für das Betragsquadrat von z :

$$|z|^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 - x_3^2}{(1 - x_3)^2} = \frac{1 + x_3}{1 - x_3},$$

wobei beim vorletzten Gleichheitszeichen wurde die Gleichung der Einheitssphäre $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ verwendet wurde. Es folgt

$$\Rightarrow x_3 = \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}, \quad 1 - x_3 = \frac{2}{|z|^2 + 1}.$$

Also folgt für die explizite Darstellung von p^{-1} :

$$\Rightarrow p^{-1}(z_1 + iz_2) = \frac{1}{|z|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2z_1 \\ 2z_2 \\ |z|^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Die Umkehrung der stereographischen Projektion definiert eine Distanzfunktion auf \mathbb{C}_∞ , $d : \mathbb{C}_\infty \times \mathbb{C}_\infty \rightarrow \mathbb{R}_0^+$. Definiere

$$d(z, w) := \|p^{-1}(z) - p^{-1}(w)\| = \frac{2|z - w|}{\sqrt{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)}}.$$

Da $p^{-1}(\infty) = N$ kann man einen Abstand zu ∞ definieren, $d(z, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$. Diese Distanzfunktion ist eine Metrik, da schon $(x, y) \mapsto \|x - y\|$ eine ist.

Weiterhin ist die stereographische Projektion p winkeltreu. Für zwei Kurven $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^3$ die sich in $x = \gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ schneiden ist der Winkel mit dem sie sich schneiden definiert als der Winkel mit dem sich ihre Tangenten $\gamma_1'(0)$ und $\gamma_2'(0)$ schneiden. Wenn nun $\gamma_1, \gamma_2 : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow S^2$ so gilt bei Winkeltreue

$$\frac{\langle \gamma_1'(0), \gamma_2'(0) \rangle_{\mathbb{R}^3}}{\|\gamma_1'(0)\| \|\gamma_2'(0)\|} = \frac{\left\langle \frac{d}{dt}p(\gamma_1) \Big|_{t=0}, \frac{d}{dt}p(\gamma_2) \Big|_{t=0} \right\rangle_{\mathbb{R}^2}}{\left\| \frac{d}{dt}p(\gamma_1) \Big|_{t=0} \right\| \left\| \frac{d}{dt}p(\gamma_2) \Big|_{t=0} \right\|}.$$

Mit der Umkehrabbildung p^{-1} der stereographischen Projektion zeigt man für $\gamma_a, \gamma_b : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{C}_\infty$

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dt}p^{-1}(\gamma_a) \Big|_{t=0}, \frac{d}{dt}p^{-1}(\gamma_b) \Big|_{t=0} \right\rangle_{\mathbb{R}^3} &= \left\langle \gamma_a'(0), (D(p^{-1}))^T(x)(D(p^{-1}))(x)\gamma_b'(0) \right\rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= \frac{4}{(|z|^2 + 1)^2} \langle \gamma_a'(0), \gamma_b'(0) \rangle_{\mathbb{R}^2} \\ &= g_{\mathbb{C}_\infty}(\gamma_a'(0), \gamma_b'(0)) \\ &= \langle \gamma_a'(0), \gamma_b'(0) \rangle_{\mathbb{C}_\infty}. \end{aligned}$$

Geometrisch kann man sich überlegen, dass das Bild der Tangente t der Schnitt der Ebene, die durch t und N aufgespannt wird, mit der Ebene E_3 ist, also auch wieder eine Gerade. Sei C Kreis. Dann ist auch das Bild von C , $p(C)$, ein Kreis. Einzige Ausnahme sind Kreise durch N , diese werden auf Geraden auf \mathbb{C}_∞ abgebildet (Kreise mit Radius ∞).

1.6.12 Theorem. Open mapping theorem

Sei f holomorph und nicht konstant im Gebiet Ω . Dann ist f offene Abbildung (das Bild einer offenen Menge ist offen).

Beweis. Es sei $V_\epsilon := \{w \mid |w - w_0| < \epsilon\}$ mit $w_0 := f(z_0)$. Nun ist zu zeigen, dass $V_\epsilon \subset f(U_\delta)$ und wenn $w \in V_\epsilon$ dann $\exists z \in U_\delta$ mit $f(z) = w$. Wähle dazu ein festes w und definiere

$$f(z) - w = \underbrace{f(z) - w_0}_{:=F(z)} + \underbrace{w_0 - w}_{:=G(z)}.$$

Wähle weiterhin δ klein genug mit $f(z) - w_0 \neq 0$ auf C_δ , $K(\delta) := \min_{z \in C_\delta} |f(z) - w_0|$. Sei $\epsilon > 0$ mit $\epsilon < K(\delta)$. Dann gilt $|F(z)| > |G(z)| = \epsilon$ für $z \in C_\delta$. Damit gilt nach Rouché's Theorem, dass $F(z)$ und $F(z) + G(z) = f(z) - w$ die gleiche Anzahl an Nullstellen in C_δ haben. \square

1.6.13 Theorem. Maximum modulus principle

Sei f holomorphe, nicht konstante Funktion im Gebiet Ω . Dann kann $|f|$ das Maximum *nicht* innerhalb Ω annehmen.

Beweis. Annahme: $|f|$ nimmt Maximum bei $z_0 \in \Omega$ an. Dann gibt es ein $f(z)$ mit $z \in D_r(z_0)$ sodass $|f(z)| > |f(z_0)|$. \square

1.6.14 Korollar.

Sei Ω Gebiet mit kompaktem Abschluss $\bar{\Omega}$. Dann gilt für eine holomorphe, nicht konstante Funktion f

$$\sup_{z \in \Omega} |f(z)| = \max_{z \in \partial\Omega} |f(z)|.$$

Dies gilt auch für harmonische Funktionen.

1.6.15 Definition. Homotopie

Zwei Kurven sind homotop, wenn eine stetig in die andere überführt werden kann, mathematisch formuliert bedeutet das: γ_0 und $\gamma_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sind homotop, wenn $\forall s \in [0, 1] \exists$ Kurve γ_s mit Parametrisierung $\gamma_s(t)$, $\gamma_s(a) = \alpha, \gamma_s(b) = \beta$ die stetig in $(t, s) \in [a, b] \times [0, 1]$ ist.

1.6.16 Theorem.

Sei f holomorph in Ω . Falls γ_0 und γ_1 homotop sind gilt

$$\int_{\gamma_0} f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz.$$

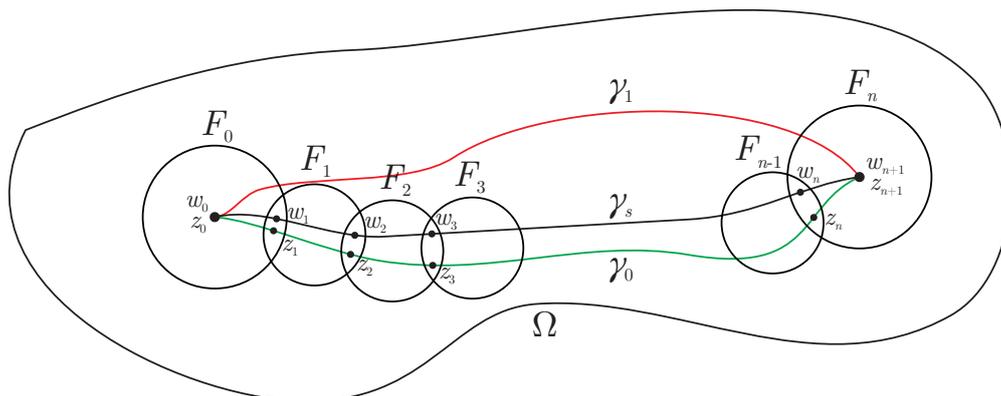


Abbildung 11: Illustration der Beweismethode.

Beweis. Betrachte Abbildung 11 zur Veranschaulichung. Da f holomorph, findet man in Umgebungen um feste Punkte Stammfunktionen F_i , für die gilt $\forall i : F'_i = f$ und $F_i = F_{i+1} + c_i$, da sich die Stammfunktionen jeweils nur um eine Konstante unterscheiden können. Wählt man eine Kurve γ_s , die nah zur Kurve γ_0 verläuft, so kann man

Stammfunktionen definieren, die beide Kurven einschließen. Man schreibt

$$\begin{aligned}
 \int_{\gamma_0} f - \int_{\gamma_s} f &= \sum_{i=0}^n \left(\int_{z_i}^{z_{i+1}} f - \int_{w_i}^{w_{i+1}} f \right) \\
 &= \sum_{i=0}^n [(F_i(z_{i+1}) - F_i(z_i)) - (F_i(w_{i+1}) - F_i(w_i))] \\
 &= \sum_{i=0}^n [(F_i(z_{i+1}) - F_i(w_{i+1})) - (F_i(z_i) - F_i(w_i))] \\
 &= \sum_{i=1}^{n+1} [F_{i-1}(z_i) - F_{i-1}(w_i)] - \sum_{i=0}^n [F_i(z_i) - F_i(w_i)] \\
 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} (F_n(z_{n+1}) - F_n(w_{n+1}) - (F_0(z_0) - F_0(w_0))) \\
 &\stackrel{\textcircled{2}}{=} 0.
 \end{aligned}$$

Bei ① wurde verwendet, dass

$$F_{i-1}(z_i) - F_{i-1}(w_i) = F_i(z_i) - F_i(w_i),$$

da $F_{i-1}(z) = F_i(z) + c$, wenn z aus dem Schnitt der beiden Kreise in denen F_{i-1} und F_i definiert sind. Damit heben sich alle Terme bis auf den ersten und den letzten auf. Bei ② geht ein, dass nach Konstruktion $z_0 = w_0$ und $z_{n+1} = w_{n+1}$. Damit gilt

$$\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_s} f,$$

man wiederholt diese Prozedur, bis $\int_{\gamma_0} f = \int_{\gamma_1} f$. □

1.6.17 Korollar.

Jede holomorphe Funktion in einem *einfach zusammenhängenden* Gebiet Ω hat eine Stammfunktion, Ω ist einfach zusammenhängend, wenn je zwei Kurven homotop sind.

Beweis. $F(z) = \int_{\gamma_z} f(\omega) d\omega$ liefert eine Stammfunktion, dies ist wichtig für die Definition des Logarithmus. □

1.7 Komplexer Logarithmus

Der komplexe Logarithmus sollte folgende Eigenschaften erfüllen:

- (a) $\log(z)$ sollte die Umkehrfunktion von e^z sein, $e^{\log(z)} = z$
- (b) die Ableitung des Logarithmus ist $(\log(z))' = \frac{1}{z}$
- (c) Für $z = re^{i\theta}$ soll gelten $\log(z) = \log(r) + i\theta$.

Also muss man den Definitionsbereich einschränken. Eine bestimmte Wahl dieses Definitionsbereiches nennt man *Zweig* des Logarithmus.

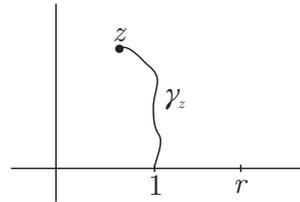
1.7.1 Theorem.

Sei Ω einfach zusammenhängend mit $1 \in \Omega$ und $0 \notin \Omega$. Dann gibt es einen Zweig des Logarithmus $F(z) = \log_{\Omega}(z)$ sodass

- (a) F holomorph in Ω
- (b) $e^{F(z)} = z$ mit $z \in \Omega$
- (c) $F(r) = \log(r)$ mit $r > 0$.

Beweis. Da $0 \notin \Omega$ ist $\frac{1}{z}$ holomorph in Ω und man kann eine Stammfunktion definieren durch

$$F(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{\omega} d\omega.$$



Starte der Weg γ_z bei 1. Damit beweist man die Forderungen

- (a) $\Rightarrow F(z)$ holomorph
- (b) zeige, dass $e^{-F(z)}z = 1$. Es ist

$$\frac{d}{dz} \left(e^{-F(z)}z \right) = e^{-F(z)}(1 - F'(z)z) = 0,$$

da $F'(z) = \frac{1}{z}$. Also kann $e^{-F(z)}z$ nur konstant sein. Beispielhaft setzen wir $z = 1$ um die Konstante zu bestimmen, es ist

$$F(1) = \int_{\gamma_1} \frac{1}{\omega} d\omega = 0 \Rightarrow e^{-F(1)}1 = e^{-0} = 1.$$

- (c) Für $r > 0$ gilt

$$F(r) = \int_1^r \frac{1}{x} dx = \log(r).$$

□

1.7.2 Beispiel.

Definiere $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{\mathbb{R}_-\}$. Dann ergibt sich für den Logarithmus

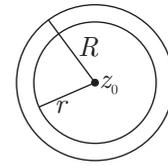
$$\log_{\Omega}(z) = \int_{\gamma_z} \frac{1}{z} dz = \int_1^r \frac{1}{x} dx + \int_0^{\theta} \frac{1}{re^{i\varphi}} ire^{i\varphi} d\varphi = \log(r) + i\theta$$

mit $\theta \in (-\pi, \pi)$.

1.7.3 Theorem.

Sei f holomorph in $D_R(z_0)$ sodass $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, dann gilt für a_n

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta & \text{für } n \geq 0 \\ \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta = 0 & \text{für } n < 0 \end{cases}$$



wobei $r < R$.

Beweis. Verwende Theorem 1.4.10 und setze eine Parametrisierung $\xi(\theta) = z_0 + re^{i\theta}$ ein, sei zuerst $n \geq 0$,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i\theta(n+1)}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Analog erhält man für $n < 0$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} f(\xi)(\xi - z_0)^{-1-n} d\xi \\ &= 0, \end{aligned}$$

da der Integrand holomorph ist wegen $(-1-n) \geq 0$. Mit Einsetzen einer Parametrisierung folgt das selbe Integral wie für $n > 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + re^{i\theta})}{r^{n+1} e^{i\theta(n+1)}} ire^{i\theta} d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \quad \text{für } n < 0. \end{aligned}$$

□

1.7.4 Korollar.

Sei f wie oben, dann ist der Funktionswert des Kreismittelpunkts definiert durch

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Beweis. Aus der Entwicklung von f erhält man $f(z_0) = a_0$. Mit Theorem 1.7.3 berechnet man a_0 und erhält das geforderte Ergebnis. □

1.7.5 Korollar.

Sei f wie oben, $u = \operatorname{Re}(f)$, dann ist

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Bemerke: Dies gilt auch für Funktionen $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\Delta u = 0$ (also harmonische Funktionen).

1.7.6 Theorem. Laurent-Reihe

Sei f holomorph im Kreisring $\mathcal{R} := \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$ mit $0 < r_1 < r_2$. Dann kann man für f schreiben $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$, wobei die Reihe absolut konvergiert innerhalb von \mathcal{R} .

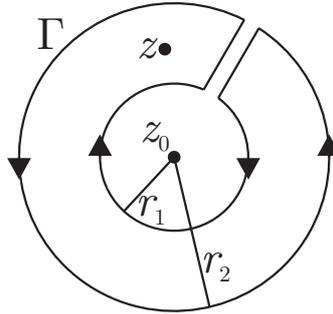


Abbildung 12: Integration entlang des Weges Γ .

Beweis. Verwende Cauchy's Integralsatz um zu schreiben (vgl. Abbildung 12)

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \right).$$

Sei nun $|\xi| = r_2$ und weiterhin $|z| < r_2$. Also ist $\left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1$. Verwende die geometrische Reihe um zu schreiben

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}.$$

Analog erhält man mit $|\xi| = r_1$ und $|z| > r_1$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{\xi - z_0 - (z - z_0)} = \frac{-1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \frac{-1}{z - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right)^n \\ &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^{n-1}}{(z - z_0)^n} = - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(\xi - z_0)^{-n-1}}{(z - z_0)^{-n}} \\ &= - \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Also folgt insgesamt

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{C_2} f(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi + \int_{C_1} f(\xi) \sum_{n=-\infty}^{-1} \frac{(z-z_0)^n}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi \right) \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \\
 \text{mit } a_n &= \frac{1}{2\pi i} \begin{cases} \int_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi & n \geq 0 \\ \int_{C_1} \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}} d\xi & n < 0. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Mit den Eigenschaften der geometrischen Reihe konvergiert die Laurent-Reihe absolut im Innern von \mathcal{R} . \square

1.8 Konforme Abbildungen

1.8.1 Definition. konforme Abbildung

f heißt *konforme* Abbildung, wenn f holomorph und bijektiv ist. Konform bedeutet winkelerhaltend. Zwei Gebiete U, V heißen *konform äquivalent* genau dann, wenn es zwei holomorphe Funktionen $f : U \rightarrow V$ und $g : V \rightarrow U$ gibt mit $f(g(w)) = w$ und $g(f(z)) = z$.

1.8.2 Satz.

Sei $f : U \rightarrow V$ holomorph und injektiv, dann ist $f'(z) \neq 0 \forall z \in U$. Die Inverse von $f(U)$ ist auch holomorph.

Beweis. Angenommen $f'(z_0) = 0$. Dann kann man f in eine Potenzreihe entwickeln und daran sofort ablesen, dass $a_0 = f(z_0)$ und $a_1 = f'(z_0) = 0$. D.h. man kann schreiben $f(z) - f(z_0) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$. Sei $w \in V$ beliebig. Setze

$$f(z) - (f(z_0) + w) = F(z) + G(z)$$

mit $F(z) := a_2(z-z_0)^2 - w$ und $G(z) := \sum_{n=3}^{\infty} a_n (z-z_0)^n = (z-z_0)^3 \sum_{i=0}^{\infty} a_{3+i} (z-z_0)^i$. Wähle jetzt ϵ so, dass

$$|a_2|\epsilon^2 = \underbrace{|a_2(z-z_0)^2|}_{\propto \epsilon^2} \Big|_{z \in C_\epsilon} > \underbrace{\max_{z \in C_\epsilon} |G(z)|}_{\propto \epsilon^3}.$$

Dann wähle w klein genug, so dass $|a_2(z-z_0)^2 - w| > \max_{z \in C_\epsilon} |G(z)|$. Damit ist $|F(z)| > |G(z)|$ auf C_ϵ . Nach Theorem 1.6.10 (Rouché) hat dann $F(z) + G(z) = f(z) - f(z_0) - w$ mindestens so viele Nullstellen wie $F(z)$ innerhalb von C_ϵ . Für w klein genug ($w < |a_2|\epsilon^2$) hat $F(z)$ genau zwei Nullstellen und damit auch $F(z) + G(z)$. Dann kann aber f nicht injektiv sein, weil $f'(z) \neq 0$ für z aus einer genügend kleinen Umgebung von z_0 . Dies ist aber ein Widerspruch zur Annahme und da z_0 beliebig war ist $f'(z) \neq 0$ in ganz U . \square

1.8.3 Beispiel.

Dieses Beispiel soll den obigen Satz plausibel machen. Sei g die Inverse von f . Definiere $g(w) = z, g(w_0) = z_0$ und schreibe

$$\frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \frac{1}{\frac{w-w_0}{g(w)-g(w_0)}} = \frac{1}{\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} \xrightarrow{z \rightarrow z_0} \frac{1}{f'(z)}$$

mit $f'(z) \neq 0$. Also ist $f'(z) \neq 0$ wenn die Umkehrabbildung existiert.

1.8.4 Bemerkung. zur Winkeltreue

Betrachte zwei Kurven im Komplexen, $\gamma(t), \eta(t) \in \mathbb{C}$, die sich für $t = 0$ schneiden, $\gamma(0) = \eta(0)$. Die Tangenten sind $\gamma'(0)$ und $\eta'(0)$. Unter welchem Winkel schneiden sie sich? Allgemein ist für zwei komplexe Zahlen $w = re^{i\varphi}$ und $z = \rho e^{i\theta}$ der Winkel enthalten in

$$\chi(w, z) := \frac{w\bar{z}}{|w||z|} = \frac{re^{i\varphi}\rho e^{-i\theta}}{r\rho} = e^{i(\varphi-\theta)}.$$

Das Argument der Funktion liefert dann den Winkel, $\arg \chi(w, z) = \varphi - \theta$. Für die beiden Tangenten ergibt sich

$$\chi(\gamma'(0), \eta'(0)) = \frac{\gamma'(0)\overline{\eta'(0)}}{|\gamma'(0)||\eta'(0)|} =: \alpha.$$

Unter Anwendung von f soll der Winkel nun der selbe sein. Nach der Kettenregel ist $(f(\gamma(t)))' = f'(\gamma(t))\gamma'(t)$ und man erhält

$$\begin{aligned} \chi((f(\gamma(0)))', (f(\eta(0)))') &= \frac{f'(\gamma(0))\gamma'(0)\overline{f'(\eta(0))\eta'(0)}}{|f'(\gamma(0))||\gamma'(0)||f'(\eta(0))||\eta'(0)|} \\ &= \frac{|f'(\gamma(0))|^2 \gamma'(0)\overline{\eta'(0)}}{|f'(\gamma(0))|^2 |\gamma'(0)||\eta'(0)|} \\ &= \alpha, \end{aligned}$$

da $\gamma(0) = \eta(0)$ und $f' \neq 0$.

1.8.5 Theorem.

Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ die Einheitskreisscheibe ohne Rand und $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \text{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene ohne Rand. Dann ist die Funktion $F(z) = \frac{i-z}{i+z}$ eine konforme Abbildung von \mathbb{H} nach \mathbb{D} .

Beweis. Sei $z \in \mathbb{H}$. Dann ist $|F(z)| = \frac{|z-i|}{|z-(-i)|} < 1$. Wohin wird der Rand abgebildet? Der Rand von \mathbb{H} ist die reelle Achse, sei dazu $x \in \mathbb{R}$. Es ist

$$F(x) = \frac{i-x}{i+x} = -\frac{x-i}{x+i} = -\frac{\bar{w}}{w} \text{ mit } w = x+i$$

Es ist offensichtlich $|F(x)| = 1$ und $F(x = 0) = 1, F(x = \pm\infty) = -1$. Die Umkehrabbildung zu F ist $G : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{H}, G(w) = i \frac{1-w}{1+w}$. Der Rand der Einheitskreisscheibe ist der Einheitskreis, $w = e^{i\varphi}$. Dieser wird abgebildet auf

$$G(e^{i\varphi}) = i \frac{1 - e^{i\varphi}}{1 + e^{i\varphi}} = \frac{e^{i\varphi/2}}{e^{i\varphi/2}} \frac{e^{-i\varphi/2} - e^{i\varphi/2}}{(-i)(e^{-i\varphi/2} + e^{i\varphi/2})} = \frac{\sin(\varphi/2)}{\cos(\varphi/2)} = \tan(\varphi/2).$$

Nun bleibt noch zu zeigen, dass $F(G(w)) = w$ und $G(F(z)) = z$. Dies wird dem geeigneten Leser als Übungsaufgabe überlassen. \square

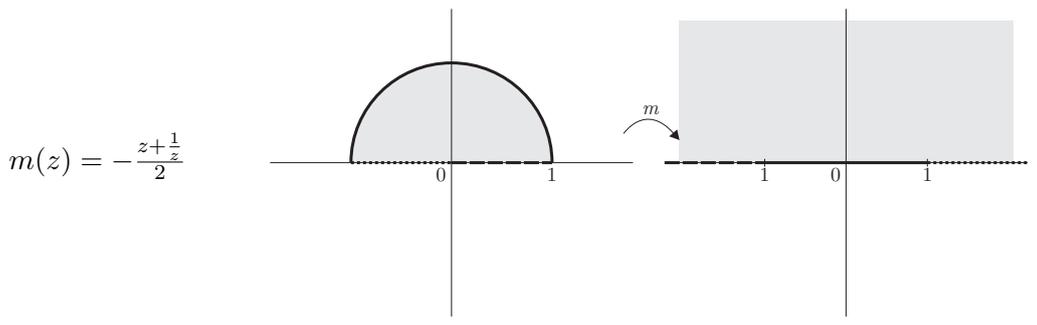
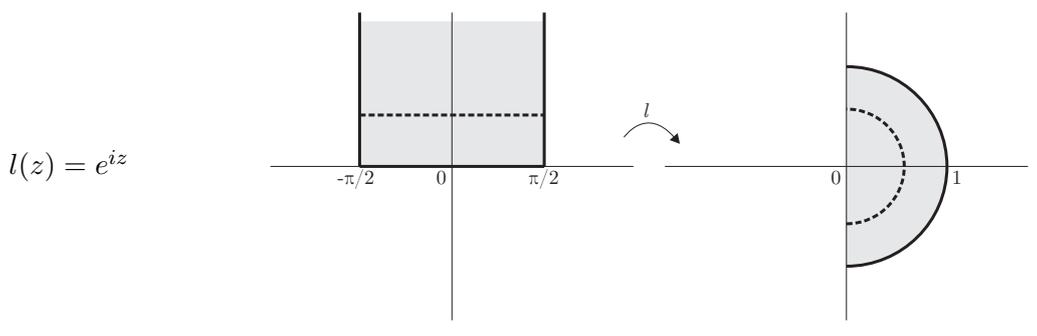
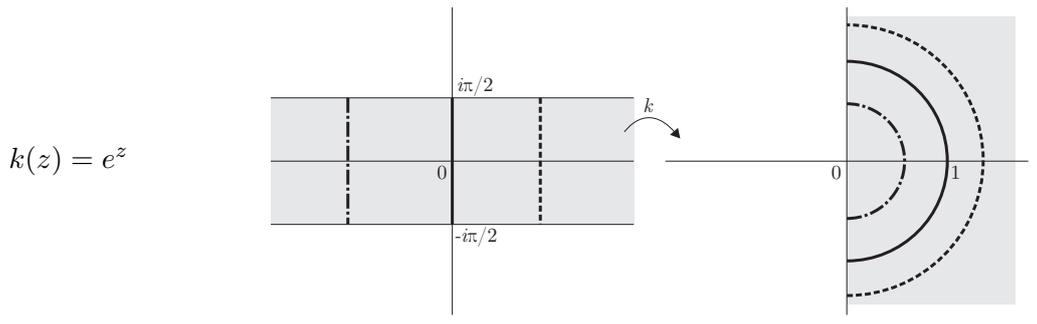
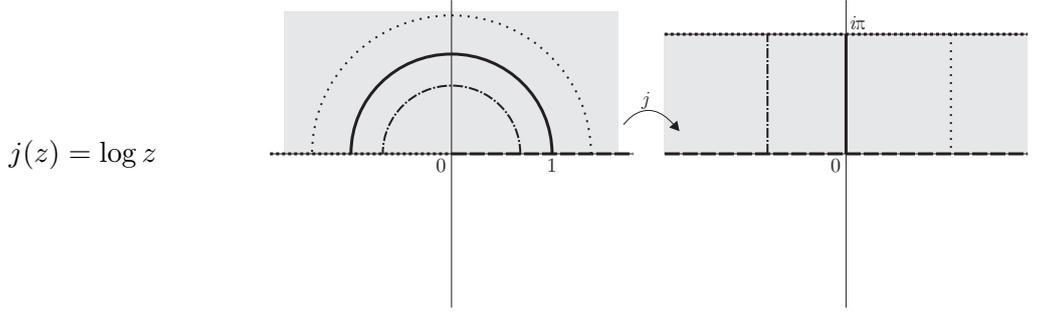
1.8.6 Beispiel. konforme Abbildungen

In der folgenden Tabelle sind einige konforme Abbildungen samt ihrer geometrischen Interpretation aufgeführt.

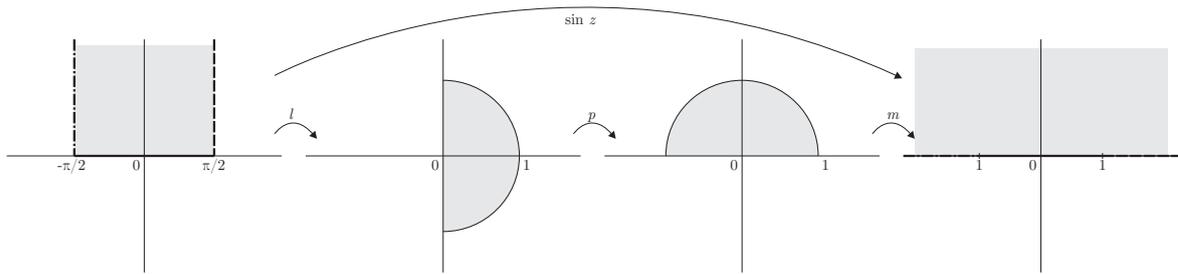
Funktion	Geometrische Interpretation
$F(z) = \frac{i-z}{i+z}$	
$f(z) = z^n,$ $g(w) = w^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \log w}$	
$h(z) = \frac{1+z}{1-z}$	

Funktion

Geometrische Interpretation



Mithilfe dieser lässt sich der Sinus darstellen als $\sin z = -\frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}) = m \circ p \circ l(z)$
 wobei $p(z) = iz$:



1.8.7 Lemma. Schwarz

Für Funktionen $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ mit $f(0) = 0$, die holomorph sind gilt

- (a) $|f(z)| \leq |z|$
- (b) Wenn es ein $z_0 \in \mathbb{D}$ gibt mit $|f(z_0)| = |z_0|$, dann ist f eine Rotation, $f(z) = ze^{i\theta}$ mit $\theta \in [0, 2\pi]$.
- (c) $|f'(0)| \leq 1$. Wenn $|f'(0)| = 1$ ist f Rotation.

Beweis. Zu (a): Da f holomorph auf \mathbb{D} kann man in eine Potenzreihe entwickeln ($f(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots$) und erhält mit $f(0) = 0$, dass $a_0 = 0$. Definiere dann eine holomorphe Funktion

$$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0. \end{cases}$$

Sei $|z| = r < 1$. Dann ist $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{r} \leq \frac{1}{r}$, da $|f(z)| \leq 1$. Nach Theorem 1.6.13 (maximum modulus principle) gilt dies nun für alle z innerhalb des Kreises mit Radius r , $|g(z)| \leq \frac{1}{r} \forall |z| \leq r < 1$. Da $|g(z)|$ das Maximum nur auf dem Rand von \mathbb{D} annehmen kann folgt $|g(z)| = \frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1 \forall z \in \mathbb{D}$ und damit

$$|f(z)| \leq |z| \forall z \in \mathbb{D}.$$

Zu (b): Es ist $|f(z_0)| = |z_0|$ und damit $|g(z_0)| = \frac{|f(z_0)|}{|z_0|} = 1$. Also nimmt $|g(z)|$ das Maximum in Innern von \mathbb{D} an. Dann kann $|g|$ nur konstant 1 auf \mathbb{D} sein. $\Rightarrow g(z) = e^{i\theta}$ mit $\theta \in [0, 2\pi]$ und damit folgt nach Definition von $g(z)$, dass $f(z) = ze^{i\theta}$.

Zu (c): Es ist $\frac{|f(z)|}{|z|} \leq 1$ und mit $f(0) = 0$ auch $\frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} \leq 1$. Bildet man jetzt den Limes $z \rightarrow 0$ auf beiden Seiten, so erhält man

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{|f(z) - f(0)|}{|z|} = |f'(0)| \leq 1.$$

Wenn nun nach Voraussetzung $|f'(0)| = 1$, so verwendet man das selbe Argument wie zuvor,

$$|f'(0)| = 1 = \lim_{z \rightarrow 0} \left| \frac{f(z)}{z} \right| = |g(0)|.$$

Da $|g(z)|$ das Maximum im Innern von \mathbb{D} annimmt, kann $|g(z)|$ nur konstant auf \mathbb{D} sein und damit ist $g(z) = e^{i\theta}$ und f Rotation, $f(z) = ze^{i\theta}$. \square

1.8.8 Definition. Automorphismus

Eine konforme Abbildung $f : \Omega \rightarrow \Omega$ heißt *Automorphismus* auf Ω . Es bezeichne $\text{Aut}(\Omega)$ die Menge aller Automorphismen auf Ω . Diese bilden eine Gruppe, d.h.

$$f \in \text{Aut}(\Omega) \wedge g \in \text{Aut}(\Omega) \Rightarrow f \circ g \in \text{Aut}(\Omega).$$

Weiterhin ist $g^{-1} \circ f^{-1}$ die Inverse zu $f \circ g$.

1.8.9 Theorem.

Wenn f ein Automorphismus auf \mathbb{D} ist, dann existiert ein $\theta \in [0, 2\pi]$ und $\alpha \in \mathbb{D}$, sodass

$$f(z) = e^{i\theta} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}.$$

Beweis. Definiere $\psi_\alpha(z) := \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}$. Es ist

$$\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \frac{\alpha - \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}}{1 - \bar{\alpha} \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z}} = z,$$

d.h. $\psi_\alpha \in \text{Aut}(\mathbb{D})$, da ψ_α holomorph und bijektiv. Weiterhin ist $\psi_\alpha(0) = \alpha$ und $\psi_\alpha(\alpha) = 0$. Betrachte die Abbildung des Einheitskreises von ψ_α :

$$\psi_\alpha(e^{i\theta}) = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{1 - \bar{\alpha}e^{i\theta}} = \frac{\alpha - e^{i\theta}}{e^{i\theta}(e^{-i\theta} - \bar{\alpha})} = -e^{-i\theta} \frac{\alpha - e^{i\theta}}{\alpha - e^{i\theta}} = -e^{-i\theta} \frac{w}{\bar{w}}.$$

$f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ ist Automorphismus auf \mathbb{D} und deswegen gibt es ein $\alpha \in \mathbb{D}$, sodass $f(\alpha) = 0$. Definiere nun $g(z) := f \circ \psi_\alpha$. Da g eine Verkettung von Automorphismen ist, ist g selbst Automorphismus auf \mathbb{D} . Es ist $g(0) = f \circ \psi_\alpha(0) = f(\alpha) = 0$. Nach Lemma 1.8.7 (Schwarz) ist $|g(z)| \leq |z|$. Für g^{-1} gilt dann das selbe, denn $g^{-1}(0) = 0$ und $g^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{D})$. Also kann man auch schreiben $|g^{-1}(w)| \leq |w|$ mit $w = g(z)$. Setzt man dieses ein erhält man $|z| \leq |g(z)|$. Also muss gelten $|g(z)| = |z|$. Nach Punkt (b) vom Lemma von Schwarz ist g dann eine Rotation, $g(z) = f \circ \psi_\alpha(z) = e^{i\theta}z$. Da $\psi_\alpha \circ \psi_\alpha = \text{Id}$ schreibt man

$$f(z) = f \circ \psi_\alpha \circ \psi_\alpha(z) = e^{i\theta} \psi_\alpha(z)$$

und erhält was zu zeigen war. □

1.8.10 Beispiel.

Man möchte eine konforme Abbildung von der oberen Halbebene in die obere Halbebene finden, $\varphi : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$. Dazu transformiert man zuerst \mathbb{H} auf \mathbb{D} , hat dort eine konforme Abbildung $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$ und transformiert dann wieder zurück. $F(z) = \frac{i-z}{i+z}$ bildet die reelle Achse auf den Einheitskreis ab. Es ist dann

$$\varphi = F^{-1} \circ f \circ F(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad a, b, c, d \in \mathbb{R},$$

wobei $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$ gilt. Man kann allgemein schreiben

$$\varphi = \varphi_M(z) \text{ mit } M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \det M = 1, \quad M \in \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Verkettet man zwei Funktionen φ_M und φ_N , so gilt $\varphi_M \circ \varphi_N = \varphi_{M \cdot N}(z)$.

1.8.11 Theorem. Riemann'scher Abbildungssatz

Sei $\Omega \subset \mathbb{C}$ offen, nicht leer, nicht ganz \mathbb{C} und einfach zusammenhängend. Sei $z_0 \in \Omega$, dann existiert eine eindeutige konforme Abbildung $F : \Omega \rightarrow \mathbb{D}$, sodass $F(z_0) = 0$ und $|F'(z_0)| > 0$.

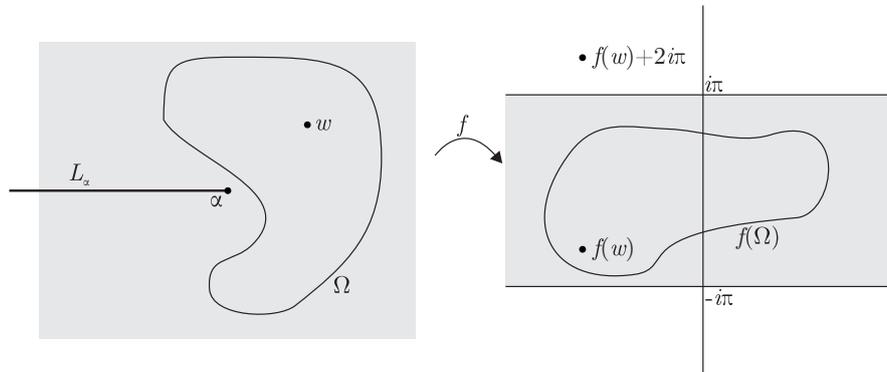


Abbildung 13: Die Menge $\mathbb{C} \setminus \{L_\alpha\}$ wird auf einen Streifen in der komplexen Ebene abgebildet.

Beweis. Man möchte eine konforme Abbildung $F : \Omega \rightarrow U \subset \mathbb{D}$ finden. Sei zunächst $\alpha \notin \Omega$, dann ist $f(z) = \log(z - \alpha)$ holomorph in Ω . Sei weiterhin $w \in \Omega$, dann liegt $f(w) + 2\pi i$ auf jeden Fall außerhalb des Bildes von Ω , denn der Logarithmus bildet auf einen Streifen der Dicke 2π ab (vgl. Abbildung 13). Das bedeutet insbesondere $f(z) \neq f(w) + 2\pi i \forall z \in \Omega$ und damit

$$f(z) - (f(w) + 2\pi i) \neq 0 \forall z \in \Omega.$$

Definiere also eine Funktion

$$F(z) := a \frac{1}{f(z) - (f(w) + 2\pi i)} + c,$$

die beschränkt in Ω ist. Mit geeigneten a, c ist $|F(z)| < 1 \forall z \in \Omega$. $\Rightarrow F : \Omega \rightarrow F(\Omega) \subset \mathbb{D}$. \square

1.8.12 Korollar.

Erfülle U, V die Bedingungen von oben. Dann sind U, V konform äquivalent.

1.8.13 Beispiel.

Die Funktion S bildet die obere Halbebene auf ein Rechteck ab,

$$S(z) = \int_0^z \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi + k^{-1})(\xi + 1)(\xi - 1)(\xi - k^{-1})}}, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, \pm 1\}.$$

Um die Behauptung zu zeigen, genügt es zu zeigen, dass die reelle Achse auf den Rand des Rechtecks abgebildet wird. Sei zunächst $\beta > 0$. Dann gilt

$$\left(\xi + \frac{1}{k}\right)^\beta = e^{\beta \log(\xi + \frac{1}{k})} = e^{\beta(\log|\xi + \frac{1}{k}| + i \arg(\xi + \frac{1}{k}))} = \left|\xi + \frac{1}{k}\right|^\beta e^{i\beta \arg(\xi + \frac{1}{k})}.$$

Sei o.B.d.A. $\frac{1}{k} > 1$ und $F(\xi) := (\xi + k^{-1})(\xi + 1)(\xi - 1)(\xi - k^{-1})$. Betrachte nun $S(z)$ mit $z \in \mathbb{R}$ und ändere die Grenzen im Integral:

$$S(z) = \int_{-\infty}^z \frac{d\xi}{F(\xi)^{1/2}} - \int_{-\infty}^0 \frac{d\xi}{F(\xi)^{1/2}} =: \tilde{S}(z) + c,$$

dabei ist $c \in \mathbb{C}$ eine Konstante, die das Rechteck auf der komplexen Ebene verschiebt. Für die Form genügt es daher $\tilde{S}(z)$ zu betrachten.

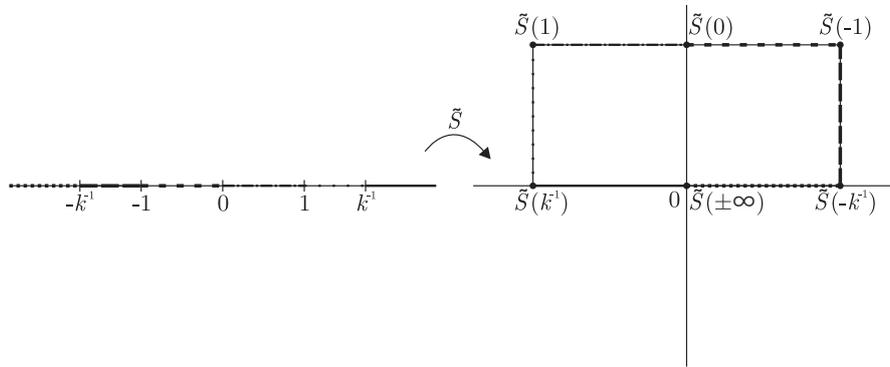


Abbildung 14: Die Funktion \tilde{S} bildet die reelle Achse auf den Rand eines Rechtecks ab.

1. Sei $z < -\frac{1}{k}$. Dann sind alle Terme unter der Wurzel negativ und man kann schreiben

$$\tilde{S}(z) = \int_{-\infty}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)|^{1/2} (e^{i\frac{\pi}{2}})^4} = \int_{-\infty}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)|^{1/2}}.$$

Da die Wurzel aus den positiven Beträgen reell ist, ist auch das Integral reell und deswegen ist $\tilde{S}(z)$ für $z < -\frac{1}{k}$ auf der positiven reellen Achse.

2. Sei $-\frac{1}{k} < z < -1$. Dann ist

$$\tilde{S}(z) = \tilde{S}(-k^{-1}) + \int_{-k^{-1}}^z \frac{d\xi}{F(\xi)} = \tilde{S}(-k^{-1}) + \int_{-k^{-1}}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)| (e^{i\frac{\pi}{2}})^3} = \tilde{S}(-k^{-1}) + i \int_{-k^{-1}}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)|}.$$

Für $-\frac{1}{k} < z < -1$ bewegt man sich also in positiver imaginärer Richtung vom Punkt $\tilde{S}(-k^{-1})$ aus.

3. Sei $-1 < z < 0$. Dann ist

$$\tilde{S}(z) = \tilde{S}(-1) + \int_{-1}^z \frac{d\xi}{F(\xi)} = \tilde{S}(-1) + \int_{-1}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)| \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^2} = \tilde{S}(-1) - \int_{-1}^z \frac{d\xi}{|F(\xi)|}.$$

Für $-1 < z < 0$ bewegt man sich in negativer reeller Richtung vom Punkt $\tilde{S}(-1)$ aus.

Für $z > 0$ geht man analog vor und erhält das selbe Ergebnis gespiegelt an der imaginären Achse (vgl. Abbildung 14). Die reelle Achse wird also auf den Rand eines Rechtecks abgebildet.

1.8.14 Beispiel. Strömungsprofil

Bestimme das Strömungsprofil von z.B. Wind, der über eine Kante der Höhe a streicht. Finde dazu eine konforme Abbildung, in deren Bild das Strömungsprofil einfach zu berechnen ist (vgl. Abbildung 15). Mit dem reellen Potential $\varphi(x, y)$ ist das Geschwindigkeitsfeld gegeben durch $v = \varphi_x - i\varphi_y$, $v = (a, b)$ mit $a = \varphi_x$ und $b = -\varphi_y$. Der Fluss ist $\Phi(z) = \varphi + i\psi$, seine Ableitung liefert das Geschwindigkeitsfeld: $\Phi'(z) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi = \varphi_x + i\psi_x = \varphi_x - i\varphi_y = v(z)$.

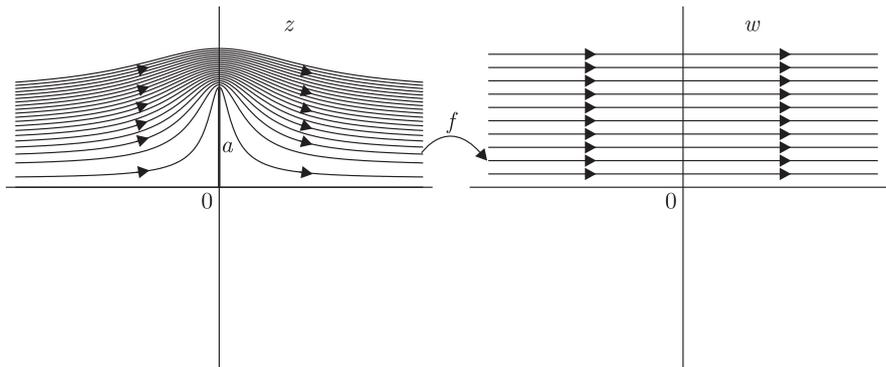
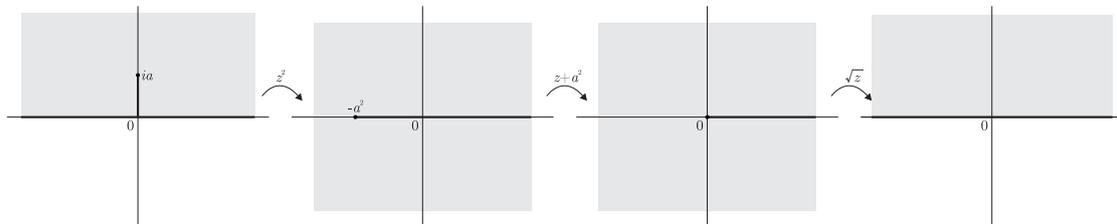


Abbildung 15: Strömungsprofil über einer Kante der Höhe a , vereinfacht dargestellt durch die Abbildung f .

Man möchte nun einen Fluss der einfachen Form $\Phi(w) = v_\infty w$, $w \in \mathbb{C}$ finden. Denn dann ist das Geschwindigkeitsfeld überall konstant, $v = \Phi'(w) = v_\infty(1 - i0) = v_\infty$. Verwende folgende Verkettung von Funktionen:



Damit ergibt sich insgesamt $f(z) = \sqrt{z^2 + a^2} = w$ und der Fluss in Abhängigkeit von z ist damit $\Phi(z) = v_\infty w = v_\infty \sqrt{z^2 + a^2}$. Das Vektorfeld ist dann $v(z) = \Phi'(z) = v_\infty \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}}$.

2 Fourier-Analysis

2.0 Einleitung

Die Wellengleichung ist gegeben durch

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u.$$

Wir untersuchen nun zwei Lösungsansätze.

Den ersten Lösungsansatz erhalten wir durch „Faktorisieren“ der Wellengleichung, schreibe dazu

$$(\partial_t - \partial_x)(\partial_t + \partial_x)u = 0, \quad (\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = 0.$$

Man liest daran ab, dass Lösungen die Form $u(x, t) = F(x+t) + G(x-t)$ haben, sich also in einen rechts- und einen linkslaufenden Teil aufspalten lassen. Gib die Randbedingungen vor: $u(t, 0) = 0$ und $u(t, \pi) = 0 \forall t \geq 0$. Gibt man jetzt noch eine Anfangsauslenkung sowie eine Anfangsgeschwindigkeit vor, so erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} f(x) &= u(0, x) = F(x) + G(x) \\ g(x) &= \partial_t u(0, x) = F'(x) - G'(x). \end{aligned}$$

Löst man dieses nach F' und G' auf, so erhält man zunächst

$$\begin{aligned} 2F'(x) &= f'(x) + g(x) \quad \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) + \int_0^x g(u) du \right) + c_1 \\ 2G'(x) &= f'(x) - g(x) \quad \Rightarrow G(x) = \frac{1}{2} \left(f(x) - \int_0^x g(u) du \right) + c_2. \end{aligned}$$

Addiere nun die beiden erhaltenen Gleichungen:

$$F(x) + G(x) = f(x) + c_1 + c_2 \quad \Rightarrow c_1 + c_2 = 0.$$

Setze nun t ein und erhalte eine Lösung für u :

$$u(t, x) = F(x+t) + G(x-t) = \frac{1}{2} (f(x+t) + f(x-t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} g(u) du.$$

Diese allgemeine Lösung heißt d'Alembert-Lösung. Setze nun die oben vorgegebenen Randbedingungen ein:

$$\begin{aligned} u(t, 0) &= \frac{1}{2} (f(t) + f(-t)) + \frac{1}{2} \int_{-t}^t g(u) du \stackrel{!}{=} 0 \\ u(t, \pi) &= \frac{1}{2} (f(\pi+t) + f(\pi-t)) + \frac{1}{2} \int_{\pi-t}^{\pi+t} g(u) du \stackrel{!}{=} 0. \end{aligned}$$

Also müssen f und g ungerade Funktionen und 2π -periodisch sein.

Als zweiten Lösungsansatz haben wir einen Separationsansatz: $u(x, t) = \varphi(x)\psi(t)$. Setzt man dies in die Wellengleichung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\psi''(t)\varphi(x) &= \psi(t)\varphi''(x) \\ \frac{\psi''(t)}{\psi(t)} &= \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} \quad \forall(x, t).\end{aligned}$$

Da dies für alle Orte und alle Zeiten gelten muss, können beide Seiten der Gleichung nur konstant sein. Man erhält damit

$$\varphi''(x) = \lambda\varphi(x) \quad \text{und} \quad \psi''(t) = \lambda\psi(t).$$

Löse die DGL mit einem Exponentialansatz, $\varphi(x) = Ae^{\sqrt{\lambda}x} + Be^{-\sqrt{\lambda}x}$. Für eine oszillatorische Lösung muss λ negativ sein, also $\lambda = -m^2$ und $\psi''(t) = -m^2\psi(t)$ sowie $\varphi''(x) = -m^2\varphi(x)$. Dann ist

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= A \cos(mx) + B \sin(mx) \\ \psi(t) &= A' \cos(mt) + B' \sin(mt).\end{aligned}$$

Setzt man wieder die Anfangsbedingungen ein, $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, so erhält man, dass $\varphi(x) = A \sin(mx)$ mit m ganzzahlig. Also ist

$$u_m(t, x) = (A_m \cos(mt) + B_m \sin(mt)) \sin(mx) \quad m \in \mathbb{Z}$$

eine Lösung der Wellengleichung. In Abbildung 16 sind beispielhaft einige Funktionen u_m gezeigt. Die allgemeine Lösung ergibt sich dann als Superposition der Einzellösungen:

$$u(t, x) = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cos(mt) + B_m \sin(mt)) \sin(mx).$$

Die Koeffizienten A_m und B_m bestimmt man aus den Anfangsbedingungen:

$$\begin{aligned}f(x) &= u(0, x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx) \\ g(x) &= \frac{\partial}{\partial t} u(0, x) = \sum_{m=1}^{\infty} mB_m \sin(mx).\end{aligned}$$

2.1 Fourier-Reihen

Es stellt sich nun die Frage, ob es Koeffizienten A_m gibt, sodass für eine vorgegebene Funktion $f(x)$ gilt $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \sin(mx)$ oder auch generell, ob eine gegebene Funktion $F(x)$ als trigonometrisches Polynom dargestellt werden kann, $F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{imx}$. Folgende Bemerkungen sind zunächst angebracht:

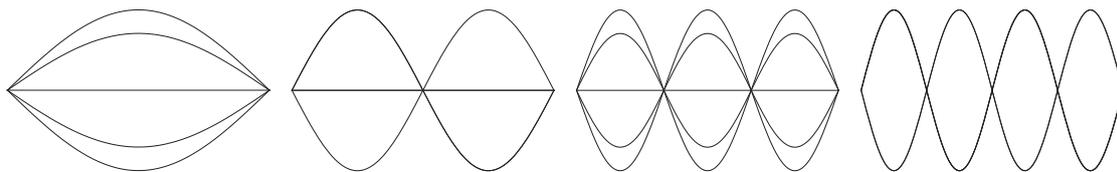


Abbildung 16: Funktionen $u_m(t, x) = \cos(mt) \sin(mx)$, die die Wellengleichung lösen. Es wurden die Graphen für $m = 1, \dots, 4$ gezeichnet, jeweils für $x \in [0, \pi]$ und $t = n\frac{\pi}{4}$ mit $n = 0, \dots, 4$.

- Wenn F stetig, dann gilt es „fast“
- Definiere $S_N(F)(x) = \sum_{m=-N}^N a_m e^{imx}$, dann gilt $\int_{-\pi}^{\pi} |S_N(F)(x) - F(x)|^2 dx \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$. Also konvergiert $S_N(F)(x)$ gegen $F(x)$ im L^2 -Sinne (Lebesgue-Integral):

$$L^2([-\pi, \pi]) = \left\{ f \mid \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

- Wenn F integrierbar, dann konvergiert $S_N(F)(x) \rightarrow F(x)$ fast überall.

2.1.1 Beispiel.

Es gelte nun $F(x) = \sum_m a_m e^{imx}$. Berechne folgendes Integral:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imx} e^{-inx} dx = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \begin{cases} 0 & m \neq n \\ 2\pi & m = n \end{cases} = 2\pi \delta_{mn}.$$

Ersetzt man in diesem Integral nun e^{imx} durch F , so erhält man

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx = \sum_m a_m \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx = \sum_m a_m 2\pi \delta_{mn} = 2\pi a_n.$$

Also liefert $a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx$ den n -ten Fourier-Koeffizient. Als konkretes Beispiel einer Funktion auf $[-\pi, \pi]$ wählen wir die Sägezahnfunktion, $F(\theta) = \theta$. Die Fourier-Koeffizienten sind

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta e^{-in\theta} d\theta = \frac{(-1)^{n+1}}{in}.$$

Die Reihenentwicklung ist

$$F(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{in} e^{in\theta} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\theta).$$

Man bemerkt, dass die Reihe nicht absolut konvergiert, da die a_n mit $\frac{1}{n}$ abfallen.

2.1.2 Definition. Fourier-Koeffizient

Sei $f(x)$ Riemann-integrierbar auf $[a, b]$ mit $b - a = L$, dann ist der n -te Fourier-Koeffizient definiert durch

$$a_n = \hat{f}(n) = \frac{1}{L} \int_a^b f(x) e^{-\frac{2\pi}{L}inx} dx.$$

2.1.3 Bemerkung.

Für eine Funktion, die nur auf einem Intervall definiert ist, definiert die Fourier-Reihe eine periodische Funktion. Die Funktion „lebt“ dann auf dem Kreis, man kann also schreiben $f(x) = F(e^{iy})$. Wie geht das? Wenn f darstellbar ist als Fourier-Reihe, $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \left(e^{i\frac{2\pi}{L}x}\right)^n$, so kann man die Substitution $\theta = \frac{2\pi}{L}x$ vornehmen und erhält

$$f(x) = f\left(\frac{L}{2\pi}\theta\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (e^{i\theta})^n = F(e^{i\theta}), \quad \theta \in [-\pi, \pi]$$

Siehe Abbildung 17 für ein Beispiel.

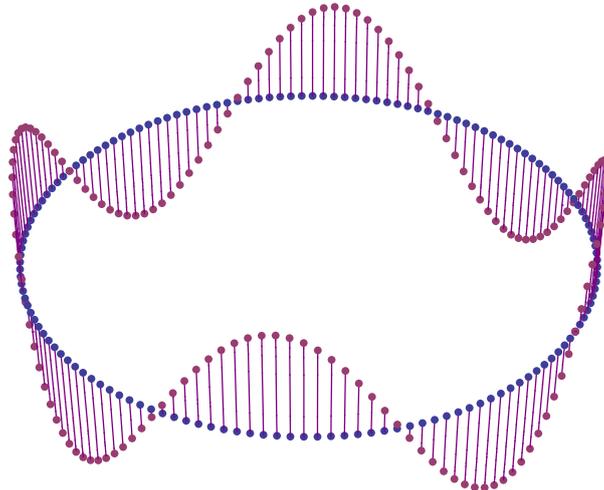


Abbildung 17: Eine Funktion auf dem Kreis; eine Sinusfunktion wäre in dieser Darstellung lediglich eine Ellipse, welche gegen das Nullniveau geneigt ist.

2.1.4 Theorem.

Sei f integrierbar am Kreis mit $\hat{f}(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$. Dann gilt $f(\theta_0) = 0 \Leftrightarrow f$ stetig im Punkt θ_0 .

Beweis. Wähle o.B.d.A. $\theta_0 = 0$ und nimm an, dass $f(0) > 0$, f reell. Definiere $P_\epsilon(\theta) := \epsilon + \cos \theta$. Wähle nun $\delta, \epsilon, \eta > 0$ entsprechend der folgenden Kriterien (Stetigkeit von f im Punkt $\theta_0 = 0$, vgl. Abbildung 18):

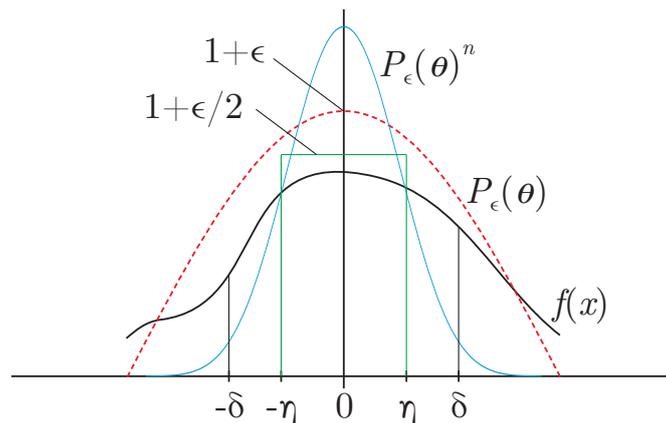


Abbildung 18: Veranschaulichung des Beweises zu Theorem 2.1.4.

1. δ so, dass $f(\theta) > \frac{1}{2}f(0)$ für $|\theta| \leq \delta$
2. ϵ so, dass $|P_\epsilon(\theta)| \leq 1 - \frac{\epsilon}{2}$ für $|\theta| \geq \delta$
3. η so, dass $|P_\epsilon(\theta)| \geq 1 + \frac{\epsilon}{2}$ für $|\theta| \leq \eta$

Da nach Voraussetzung $\hat{f}(n) = 0 \forall n$, gilt $\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)P_\epsilon(\theta)^n d\theta = 0$. Betrachte zuerst den Fall $|\theta| \geq \delta$:

$$\left| \int_{|\theta| \geq \delta} f(\theta)P_\epsilon(\theta)^n d\theta \right| \leq 2\pi \sup_{\theta \in [-\pi, \pi]} |f(\theta)| \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Für $|\theta|$ zwischen η und δ ist das Integral sicher positiv, da f stetig und $f(\theta) > 0$ in einer Umgebung von 0:

$$\int_{\eta \leq |\theta| \leq \delta} f(\theta)P_\epsilon(\theta)^n d\theta \geq 0.$$

Für $|\theta|$ kleiner als η gilt dann

$$\int_{|\theta| \leq \eta} f(\theta)P_\epsilon(\theta)^n d\theta \geq \frac{f(0)}{2} \int_{|\theta| \leq \eta} \left(1 + \frac{\epsilon}{2}\right)^n d\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Damit folgt, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)P_\epsilon(\theta)^n d\theta \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty.$$

Dies ist allerdings ein Widerspruch zur Annahme, dass $f(0) > 0$ und somit kann nur $f(0) = 0$ gelten. \square

2.1.5 Korollar.

Wenn f stetig ist am Kreis und $\hat{f}(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$, dann ist $f \equiv 0$.

2.1.6 Korollar.

Ist f stetig am Kreis und konvergieren die Fourier-Koeffizienten absolut, ist also die Summe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$ beschränkt, $a_n = \hat{f}(n)$, dann konvergieren die Partialsummen $S_N(f)(\theta)$ gleichmäßig gegen $f(\theta)$. Dies ist äquivalent zur Formulierung $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \forall \theta \in [-\pi, \pi]$.

Beweis. Definiere $g(\theta) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta}$ mit $a_n = \hat{f}(n)$. Die Partialsummen der Fourier-Reihe von f konvergieren gleichmäßig gegen g , denn

$$\begin{aligned} |S_N(f)(\theta) - g(\theta)| &= \left| \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\theta} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\theta} \right| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{-(N+1)} a_n e^{in\theta} \right| \\ &= \left| \sum_{|n|>N} a_n e^{in\theta} \right| \leq \sum_{|n|>N} |a_n| \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Oder anders formuliert:

$$\exists \epsilon > 0 : \forall n > N_\epsilon \in \mathbb{N} : |S_n(f)(\theta) - g(\theta)| < \epsilon \quad \forall \theta \in [-\pi, \pi].$$

Da der gleichmäßige Limes stetiger Funktionen wieder stetig ist, ist g stetig. Definiere nun $h(\theta) := f(\theta) - g(\theta)$. Die Funktion h ist stetig, da sie eine Verkettung stetiger Funktionen ist. Die Fourierkoeffizienten von f und g sind die selben, also gilt $\hat{h}(n) = \hat{f}(n) - \hat{g}(n) = 0 \forall n \in \mathbb{Z}$. Nach 2.1.4 folgt dann $h(\theta) = 0$ und damit $f(\theta) = g(\theta)$. \square

2.1.7 Korollar.

Sei $f(\theta) \in C^2([-\pi, \pi])$ (zweimal stetig differenzierbar). Dann gilt $|\hat{f}(n)| \leq c \frac{1}{n^2}$ und damit $S_N(f)(\theta) \rightarrow f(\theta)$ (denn die Fourier-Koeffizienten konvergieren dann absolut).

Beweis. Integriere zweimal partiell:

$$\begin{aligned} 2\pi \hat{f}(n) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{-in} f(\theta) e^{-in\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{-in} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta \\ &= \underbrace{\frac{1}{n^2} f'(\theta) e^{-in\theta} \Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\theta) e^{-in\theta} d\theta. \end{aligned}$$

Also gilt für den Betrag der Fourier-Koeffizienten

$$|\hat{f}(n)| \leq \frac{1}{2\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(\theta)| d\theta = c \frac{1}{n^2}.$$

Nach Theorem 2.1.6 konvergieren die Partialsummen dann gegen die Funktion, da die Fourier-Koeffizienten absolut konvergieren. Bemerke, dass dies z.B. bei der Sägezahnfunktion nicht der Fall ist, diese ist nicht zweimal stetig differenzierbar und die Fourier-Koeffizienten fallen nur ab wie $\frac{1}{n}$. \square

2.1.8 Bemerkung.

Bildet man die Fourier-Koeffizienten von der Ableitung einer Funktion, so erhält man durch partielle Integration

$$\widehat{f'}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\theta) e^{-in\theta} d\theta = \frac{in}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = in \widehat{f}(n).$$

2.1.9 Definition. Faltung

Seien f, g 2π -periodische Funktionen auf \mathbb{R} . Die *Faltung* von f mit g ist definiert durch

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy.$$

2.1.10 Satz.

Seien f, g und h 2π -periodische, integrierbare Funktionen auf \mathbb{R} . Dann gilt

- (a) $(f * g) * h = f * (g * h)$
- (b) $f * g(x) = g * f(x)$
- (c) $f * (g + h) = f * g + f * h$
- (d) $f * g$ ist stetig
- (e) $\widehat{f * g}(n) = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n)$

Beweis. Für (b): Substituiere im Integral $y = x - z$ und nutze die Periodizität der Funktionen:

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy = \frac{1}{2\pi} \int_{x+\pi}^{x-\pi} g(z)f(x-z)dz \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(z)f(x-z)dz = g * f(x). \end{aligned}$$

Beweis für (e):

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(n) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)dy e^{-inx} dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny}g(x-y)e^{iny}e^{-inx} dy dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)e^{-in(x-y)} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iny} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)e^{-inu} du dy = \widehat{f}(n)\widehat{g}(n). \end{aligned}$$

□

2.2 Integralkerne

Die Partialsumme einer Fourier-Reihe ist darstellbar als Faltung mit einer neuen Funktion:

$$\begin{aligned} S_N(f)(x) &= \sum_{|n| \leq N} a_n e^{inx} = \sum_{|n| \leq N} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iny} dy e^{inx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \sum_{|n| \leq N} e^{in(x-y)} dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) D_N(x-y) dy = f * D_N(x) \end{aligned}$$

Dabei heißt $D_N(x) := \sum_{|n| \leq N} e^{inx}$ Dirichlet-Kern.

2.2.1 Definition. Familie guter Kerne

Es sei $\{K_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ eine Familie von Integralkernen auf dem Kreis. $\{K_n(x)\}$ heißt *Familie guter Kerne*, wenn

- (a) $\forall n \geq 1 : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$
- (b) $\exists M > 0 : \forall n \geq 1 : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)| dx \leq M$
- (c) $\forall \delta > 0 : \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} |K_n(x)| dx \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$.

2.2.2 Beispiel.

Betrachte eine Funktion, die $\int g(x) dx = 1$ und $g(x) \geq 0$ erfüllt. Definiere $K_n(x) := ng(nx)$. Dann ist $\int K_n(x) dx = n \int g(nx) \frac{d(nx)}{n} = \int g(x) dx = 1$.

2.2.3 Theorem.

Sei $\{K_n(x)\}$ Familie guter Kerne, f integrierbare Funktion auf dem Kreis. Dann gilt $f * K_n(x) \rightarrow f(x)$ für $n \rightarrow \infty$ $\forall x$ mit $f(x)$ stetig. Wenn f stetig auf dem Kreis ist die Konvergenz sogar gleichmäßig.

Beweis. f stetig in x bedeutet $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0 : |f(x-y) - f(x)| < \epsilon \forall |y| \leq \delta$. Unter Ausnutzung der Tatsache, dass $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x) dx = 1$ und $f * g = g * f$ schreibt man

$$\begin{aligned} f * K_n(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) (f(x-y) - f(x)) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} K_n(y) (f(x-y) - f(x)) dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} K_n(y) (f(x-y) - f(x)) dy. \end{aligned}$$

Nun lässt sich der Betrag dieses Ausdrucks abschätzen mithilfe der Stetigkeitsforderung

an f :

$$\begin{aligned} |f * K_n(x) - f(x)| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|y| \leq \delta} |K_n(y)| |f(x-y) - f(x)| dy \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |y| \leq \pi} |K_n(y)| 2 \sup_{z \in [-\pi, \pi]} |f(z)| dy \\ &\leq M\epsilon + F(n) \text{ mit } F(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

2.2.4 Definition. Fejér-Kerne

Der *Fejér-Kern* ist definiert durch

$$F_N(x) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N D_k(x).$$

Als *Cesàro-Mittel* bezeichnet man

$$\sigma_N(f)(x) := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N S_k(f)(x) = f * F_N(x).$$

2.2.5 Beispiel.

Betrachte die Folge $a_n = (-1)^n = (-1, 1, -1, 1, \dots)$, deren Partialsumme lautet $S_N = \sum_{n \leq N} a_n = (-1, 0, -1, 0, \dots)$. Bildet man das Cesàro-Mittel davon erhält man $\sigma_N = (-1, 0, -\frac{1}{3}, 0, -\frac{1}{5}, 0, \dots) \rightarrow 0$.

2.2.6 Lemma.

Die diskrete Darstellung des Fejér-Kerns ist gegeben durch

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

und F_N ist eine Familie guter Kerne.

Beweis. Die diskrete Darstellung erhält man durch Anwendung der Summenformel der geometrischen Reihe und wird hier nicht näher ausgeführt (Übungen). Die drei Eigenschaften der guten Kerne zeigt man folgendermaßen:

- (a) $\forall n \geq 1 : \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x) dx = \frac{1}{2\pi N} \sum_{k=1}^N \int_{-\pi}^{\pi} D_k(x) dx = 1$.
- (b) Da die F_N stets positiv sind, ist $|F_N(x)| = F_N(x)$ und damit die obere Grenze durch 1 gegeben.

(c) Wähle $\delta > 0$ beliebig aber fest.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} F_N(x) dx &= \frac{1}{2\pi N} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{\sin^2\left(\frac{Nx}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx \\ &\leq \frac{1}{N} \int_{\delta \leq |x| \leq \pi} \frac{1}{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)} dx \\ &= \frac{1}{N} M \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

□

2.2.7 Bemerkung.

Die Konsequenz aus 2.2.6 ist, dass $\{\sigma_N\}$ eine Familie guter Kerne ist, also $\sigma_N(f)(x) \rightarrow f(x)$ gleichmäßig, wenn f stetig auf dem Kreis ist.

2.2.8 Theorem.

Stetige Funktionen am Kreis können gleichmäßig approximiert werden durch trigonometrische Polynome.

Beweis. f ist stetig, daraus folgt direkt, dass $\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x) \rightarrow f(x)$ gleichmäßig. Dabei ist $\sigma_N(f)(x) = \sum_{|n| \leq N} c_n (e^{ix})^n$ trigonometrisches Polynom, dessen Koeffizienten c_n nicht notwendigerweise gleich den Fourier-Koeffizienten $a_n = \hat{f}(n)$ der Funktion sein müssen. □

2.3 Wiederholung: Hilbertraum und Skalarprodukt

2.3.1 Definition. Skalarprodukt

Ein *Skalarprodukt* (inneres Produkt) auf einem komplexen Vektorraum \mathcal{H} (welcher dann Prä-Hilbertraum heißt) ist eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$ für die $\forall \phi, \psi, \chi \in \mathcal{H}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ folgendes gilt:

- (a) $\langle \phi, \phi \rangle \geq 0$, $\langle \phi, \phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$ (pos. Definitheit)
- (b) $\langle \phi, \chi + \psi \rangle = \langle \phi, \chi \rangle + \langle \phi, \psi \rangle$
- (c) $\langle \phi, \alpha\psi \rangle = \alpha \langle \phi, \psi \rangle$ (Linearität in 2. Komponente)
- (d) $\langle \phi, \psi \rangle = \overline{\langle \psi, \phi \rangle}$ (Hermitesität)

2.3.2 Bemerkung.

Aus der Definition des Skalarprodukts folgt, dass

$$\langle \phi + \chi, \psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle + \langle \chi, \psi \rangle \quad \text{und} \quad \langle \alpha\phi, \psi \rangle = \bar{\alpha} \langle \phi, \psi \rangle.$$

Wegen der Linearität in der zweiten Komponente und der Antilinearität in der ersten Komponente nennt man solche Abbildungen Sesquilinearformen.

2.3.3 Definition. Orthogonalität

Zwei Vektoren $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ heißen *orthogonal*, falls $\langle \phi, \psi \rangle = 0$. Eine Folge $(\phi_j)_{j=1}^\infty$ heißt *Orthonormalfolge* (ONF), falls $\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \delta_{jk}$. Für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt bezüglich einer beliebigen Orthonormalfolge (ϕ_j) , dass

$$\psi = \underbrace{\sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \psi \rangle \phi_j}_{:=\psi_n} + \underbrace{\psi - \sum_{j=1}^n \langle \phi_j, \psi \rangle \phi_j}_{:=\psi_n^\perp}.$$

Dabei ist ψ_n orthogonal zu ψ_n^\perp , denn $\langle \psi_n, \psi_n^\perp \rangle = 0$.

2.3.4 Satz. Pythagoras

Der *Satz von Pythagoras* lautet in der allgemeinen Form (verwende die Orthogonalität von ψ_n und ψ_n^\perp)

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi_n + \psi_n^\perp, \psi_n + \psi_n^\perp \rangle = \|\psi_n\|^2 + \|\psi_n^\perp\|^2 = \sum_{j=1}^n |\langle \phi_j, \psi \rangle|^2 + \|\psi_n^\perp\|^2.$$

2.3.5 Korollar.

Sei (ϕ_j) ONF. Dann gilt $\forall \psi, \phi \in \mathcal{H}$ und $n \in \mathbb{N}$, dass

$$\|\psi\|^2 \geq \sum_{j=1}^n |\langle \phi_j, \psi \rangle|^2 \quad \text{und} \quad |\langle \phi, \psi \rangle| \leq \|\phi\| \|\psi\|$$

(Bessel-Ungleichung) (Schwarz-Ungleichung)

Beweis. Die Bessel-Ungleichung folgt direkt aus dem Satz von Pythagoras. Die Schwarz-Ungleichung erhält man aus dem Satz des Pythagoras als Spezialfall für $n = 1$: Sei $\phi_1 = \frac{\phi}{\|\phi\|}$ und $\phi \neq 0$, dann ist

$$\|\psi\|^2 \geq \left| \left\langle \frac{\phi}{\|\phi\|}, \psi \right\rangle \right|^2 = \frac{1}{\|\phi\|^2} |\langle \phi, \psi \rangle|^2$$

und es folgt direkt die Schwarz-Ungleichung. □

2.3.6 Korollar.

Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum \mathcal{H} . Dann definiert $\|\psi\| := \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ eine Norm auf \mathcal{H} und das Skalarprodukt ist stetig bezüglich dieser Norm.

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften der Norm (pos. Definitheit und Homogenität) sind sofort bewiesen und werden daher ausgelassen. Die Dreiecks-Ungleichung folgt aus der Schwarz-Ungleichung und aus $\operatorname{Re}(z) \leq |z| \forall z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \|\phi + \psi\|^2 &= \langle \phi + \psi, \phi + \psi \rangle \\ &= \|\phi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2 \operatorname{Re} \langle \phi, \psi \rangle \\ &\leq (\|\phi\| + \|\psi\|)^2. \end{aligned}$$

Für den Beweis der Stetigkeit definiere konvergente Folgen $\phi_n \rightarrow \phi$ und $\psi_n \rightarrow \psi$ in \mathcal{H} . Da in metrischen Räumen Folgenstetigkeit identisch zur Stetigkeit ist, folgt die Stetigkeit aus

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle \phi_n, \psi_n \rangle - \langle \phi, \psi \rangle| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (|\langle \phi_n - \phi, \psi_n \rangle| + |\langle \phi, \psi_n - \psi \rangle|) \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} (\|\phi_n - \phi\| \|\psi_n\| + \|\phi\| \|\psi_n - \psi\|) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

2.3.7 Definition. Hilbertraum

Ein *Hilbertraum* ist ein vollständiger, normierter Vektorraum, dessen Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ durch das Skalarprodukt gegeben ist. *Erinnerung*: Vollständig heißt, dass jede Cauchy-Folge gegen ein Element des Raumes konvergiert.

2.4 L^2 -Konvergenz von Fourier-Reihen

Für zwei Riemann-integrierbare Funktionen f und g ist das innere Produkt gegeben durch

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f(x)} g(x) dx$$

$(\mathcal{R}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bildet einen Prä-Hilbertraum mit Norm $\|f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx$. $(L^2, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ bildet einen Hilbertraum.

2.4.1 Theorem.

Sei f Riemann-integrierbar am Kreis. Dann gilt

$$\|S_N - f\|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x) - f(x)|^2 dx \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0.$$

Beweis. Für alle ganzen Zahlen n sei $e_n(\theta) = e^{in\theta}$. Somit ist die Familie $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ orthogonal, also $\langle e_n, e_m \rangle = \delta_{nm}$. Sei nun f integrierbar auf dem Kreis und seien a_n die Fourier-Koeffizienten von f ; diese lassen sich über

$$\langle f, e_n \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) e^{-in\theta} d\theta = a_n$$

darstellen. Insbesondere gilt

$$S_N(f) = \sum_{|n| \leq N} a_n e_n.$$

Dann folgt aus der Orthogonalitätseigenschaft der Familie $\{e_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ und der Darstellung der a_n , dass $f - \sum_{|n| \leq N} a_n e_n$ orthogonal zu allen e_n mit $|n| \leq N$ ist. Daher muss

$$f - \sum_{|n| \leq N} a_n e_n \perp \sum_{|n| \leq N} b_n e_n \quad \forall b_n \in \mathbb{C}$$

gelten. Daraus folgt nun zweierlei:

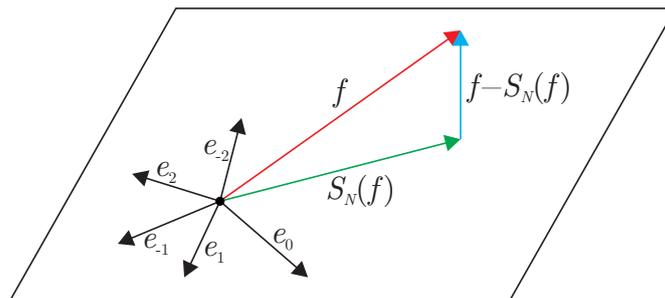


Abbildung 19: Die Differenz von f und $S_N(f)$ steht senkrecht auf allen Basisvektoren e_m , aus denen sich $S_N(f)$ zusammensetzt.

1. Wendet man den allgemeinen Satz von Pythagoras (Satz 2.3.4) auf

$$f = f - \sum_{|n| \leq N} a_n e_n + \sum_{|n| \leq N} a_n e_n$$

an (wähle also $b_n = a_n$), so ergibt sich

$$\|f\|^2 = \left\| f - \sum_{|n| \leq N} a_n e_n \right\|^2 + \left\| \sum_{|n| \leq N} a_n e_n \right\|^2.$$

Wegen Orthogonalität gilt aber auch

$$\left\| \sum_{|n| \leq N} a_n e_n \right\|^2 = \sum_{|n| \leq N} |a_n|^2$$

und damit folgt schließlich

$$\|f\|^2 = \|f - S_N(f)\|^2 + \sum_{|n| \leq N} |a_n|^2$$

2. Ferner folgt das Lemma 2.4.2, welches wir hier bereits als gegeben annehmen.

Nun zeigt man also $\|S_N(f) - f\| \rightarrow 0$ für $N \rightarrow \infty$ unter Verwendung von Lemma 2.4.2 und Theorem 2.2.8 (Approximation stetiger Funktionen am Kreis). Falls f aber nur integrierbar ist, so kann man f nicht durch trigonometrische Polynome approximieren; vielmehr verwenden wir, dass wenn f auf dem Kreis integrierbar und durch B beschränkt ist, eine Folge $(f_k)_{k=1}^\infty$ stetiger Funktionen auf dem Kreis existiert, sodass

$$\sup_{x \in [0, 2\pi]} |f_k(x)| \leq B \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

und

$$\int_0^{2\pi} |f(x) - f_k(x)| dx \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Wähle also nun eine stetige Funktion g auf dem Kreis, welche den Einschränkungen

$$\sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |g(\theta)| \leq \sup_{\theta \in [0, 2\pi]} |f(\theta)| = B$$

und

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| d\theta < \epsilon^2$$

genügt. Dann erhält man

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)|^2 d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| |f(\theta) - g(\theta)| d\theta \\ &\leq \frac{2B}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - g(\theta)| d\theta \\ &\leq C\epsilon^2 \end{aligned}$$

für eine Konstante C . Nun lässt sich g aber wegen Theorem 2.2.8 durch ein trigonometrisches Polynom p approximieren, sodass $\|g - p\| < \epsilon$ für ein vorgegebenes $\epsilon > 0$. Dann gilt aber auch mit einer Konstanten C' die Abschätzung $\|f - p\| < C'\epsilon$. Daraus folgt dann mit Lemma 2.4.2, dass die Partialsummen der Fourier-Reihe von f im Sinne der Behauptung gegen f konvergieren. \square

2.4.2 Lemma. Bestmögliche Approximation

Sei f integrierbar am Kreis mit Fourier-Koeffizienten a_n , dann gilt $\|f - S_N\| \leq \|f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n\| \forall c_n$ mit $|n| \leq N$. Es gilt Gleichheit genau dann, wenn $c_n = a_n \forall |n| \leq N$.

Beweis. Verwende die Orthogonalität von $S_N(f) - f$ und e_m mit $|m| \leq N$:

$$\begin{aligned} f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n &= f - S_N + \sum_{|n| \leq N} b_n e_n \quad \text{mit } b_n := a_n - c_n \\ \left\| f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n \right\|^2 &= \left\langle f - S_N + \sum_{|n| \leq N} b_n e_n, f - S_N + \sum_{|n| \leq N} b_n e_n \right\rangle \\ &= \langle f - S_N, f - S_N \rangle + \left\langle \sum_{|n| \leq N} b_n e_n, \sum_{|n| \leq N} b_n e_n \right\rangle \\ &= \|f - S_N\|^2 + \left\| \sum_{|n| \leq N} b_n e_n \right\|^2. \end{aligned}$$

Da der hintere Term größer oder gleich Null ist, folgt sofort die zu zeigende Ungleichung:

$$\|f - S_N\|^2 \leq \left\| f - \sum_{|n| \leq N} c_n e_n \right\|^2.$$

\square

2.4.3 Theorem. Parseval's Identität

Es sei f Riemann-integrierbar auf $[0, 2\pi]$, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2.$$

Beweis. Durch Einfügen einer Null und durch Grenzwertbildung $N \rightarrow \infty$ erhält man:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx &= \|f\|^2 = \|f - S_N(f) + S_N(f)\|^2 \\ &= \underbrace{\|f - S_N(f)\|^2}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\|S_N(f)\|^2}_{\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2}. \end{aligned}$$

Denn:

$$\left\langle \sum_m a_m e_m, \sum_n a_n e_n \right\rangle = \sum_{m,n} \langle a_m e_m, a_n e_n \rangle = \sum_{m,n} a_n \overline{a_m} \underbrace{\langle e_m, e_n \rangle}_{=\delta_{nm}} = \sum_n |a_n|^2.$$

□

2.4.4 Theorem. Riemann-Lebesgue-Lemma

Sei f integrierbar am Kreis. Dann gilt

$$|a_n| = |\hat{f}(n)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \int_0^{2\pi} f(x) \sin(nx) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \wedge \int_0^{2\pi} f(x) \cos(nx) dx \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

2.4.5 Lemma.

Seien F, G integrierbar am Kreis, $F(x) \sim \sum_n a_n e_n$ und $G(x) \sim \sum_n b_n e_n$, dann gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \overline{G(x)} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \overline{b_n}.$$

Beweis. Übung.

□

2.4.6 Beispiel. Anwendung

Sei Γ eine Kurve mit Länge l , A die eingeschlossene Fläche. Wir möchten nun bestimmen, wann A maximal wird. Sei dazu $\gamma(t), t \in [a, b]$, die Parametrisierung von Γ , $l = \int_a^b |\gamma'(t)| dt$. Die Bogenlängenparametrisierung lautet dann $\gamma(s), s \in [0, l]$ mit $|\gamma'(s)| = 1$, $s \mapsto \gamma(s) = (x(s), y(s))$, wobei $|\gamma'(s)|^2 = x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$. Mittels Green's Theorem erhält man für die eingeschlossene Fläche

$$A = \iint_A 1 dx dy = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \cdot d\mathbf{x}.$$

Das bedeutet also man kann schreiben $A = \frac{1}{2} \int_0^l (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds$. Die Behauptung ist nun, dass

$$A \leq \frac{l^2}{4\pi}, \quad \text{Gleichheit, wenn } \Gamma \text{ ein Kreis ist.}$$

Um die Behauptung zu zeigen, wähle o.B.d.A. $l = 2\pi$ und stelle die Komponenten der Parametrisierung als Fourier-Reihen dar: $x(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{ins}$, $y(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{ins}$. Dies ist möglich, da $x(0) = x(2\pi)$ und $y(0) = y(2\pi)$ und die Kurve als zweimal stetig differenzierbar angenommen wird. Jetzt bleibt also zu zeigen, dass $A \leq \pi$. Die Ableitungen der Komponenten der Parametrisierung lauten $x'(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i n a_n e^{ins}$, $y'(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} i n b_n e^{ins}$. Zeige für späteren Gebrauch folgende Gleichung mittels Parseval's Identität (2.4.3)

$$1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (x'(s)^2 + y'(s)^2) ds = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Da $x(s)$ und $y(s)$ reell sind, kann man Lemma 2.4.5 anwenden und erhält für die Fläche

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (x(s)y'(s) - y(s)x'(s)) ds = i\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n (\overline{a_n} b_n - a_n \overline{b_n}).$$

Da $|x| = |\overline{x}|$ kann man mittels Dreiecksungleichung und binomischer Formel weiter abschätzen:

$$\left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} i n (\overline{a_n} b_n - a_n \overline{b_n}) \right| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| 2 |a_n| |b_n| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| (|a_n|^2 + |b_n|^2).$$

Setze dies nun in den Ausdruck für die Fläche ein, ersetze mittels des ersten hergeleiteten Ausdrucks und erhalte

$$A \leq \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \pi.$$

Für Gleichheit muss $n = 1, 0, -1$ sein und deswegen auch $x(s) = a_0 + a_1 e^{is} + a_{-1} e^{-is}$, $y(s) = b_0 + b_1 e^{is} + b_{-1} e^{-is}$. Da x und y beide reell sind, fordert man $\overline{a_{-1}} = a_1$, $\overline{b_{-1}} = b_1$ sowie $a_0, b_0 \in \mathbb{R}$. Bestimme nun a_1 und b_1 , setze dazu ein und führe die Summen aus:

$$1 = 2(|a_1|^2 + |b_1|^2) \quad \wedge \quad 4|a_1||b_1| = 1$$

Also gilt $|a_1| = |b_1| = \frac{1}{2}$, d.h. $a_1 = \frac{1}{2} e^{i\alpha}$, $b_1 = \frac{1}{2} e^{i\beta}$. Setzt man dies in x und y ein ergibt sich

$$x(s) = a_0 + \cos(\alpha + s), \quad y(s) = a_0 \pm \sin(\alpha + s).$$

Bei Gleichheit ist die Kurve also tatsächlich ein Kreis.

2.5 Fourier-Transformation

2.5.1 Definition. kontinuierliche Fourier-Transformierte

Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ beschränkt, $|f(x)| \leq c \frac{1}{1+x^2}$. Die *kontinuierliche Fourier-Transformierte* ist definiert durch

$$\hat{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi kx} dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \int_{-N}^N f(x) e^{-i2\pi kx} dx.$$

Diese ist auch beschränkt, denn $|\hat{f}(k)| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \infty$.

2.5.2 Definition. Schwartz-Raum

Wir definieren den Schwartz-Raum als

$$S(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \mid \sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^l |f^{(k)}(x)| < \infty \quad \forall l, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

S bezeichnet also die Menge aller Funktionen, für die alle Ableitungen existieren und die schneller abfallen als jedes Polynom. Z.B. ist $e^{-x^2} \in S$, aber $e^{-|x|} \notin S$.

2.5.3 Satz.

Sei $f \in S$. Dann gilt

- (a) $\widehat{f(x+h)}(k) = \hat{f}(k) e^{i2\pi hk}$
- (b) $\widehat{f(x)e^{-i2\pi xh}}(k) = \hat{f}(k+h)$
- (c) $\widehat{f(\delta x)}(k) = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{k}{\delta}\right)$
- (d) $\widehat{f'(x)}(k) = i2\pi k \hat{f}(k)$
- (e) $\widehat{-2\pi i x f(x)}(k) = \frac{d}{dk} \hat{f}(k)$

Beweis. Für (c): Substituiere $y = \delta x$ und erhalte

$$\widehat{f(\delta x)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x) e^{-i2\pi kx} dx = \frac{1}{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{i2\pi \frac{k}{\delta} y} dy = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{k}{\delta}\right).$$

Für (d): Integriere partiell und nutze aus, dass die Randterme verschwinden, da f hinreichend schnell abfällt:

$$\widehat{f'(x)}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-i2\pi kx} dx = i2\pi k \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi kx} dx = i2\pi k \hat{f}(k).$$

□

2.5.4 Theorem.

Sei $f(x) = e^{-\pi x^2}$, dann ist $f(x) = \hat{f}(x)$.

Beweis. Definiere eine holomorphe Funktion $f(z) = e^{-\pi z^2}$. Lege nun einen Rechteck-Weg Γ_R durch die komplexe Ebene (vgl. Abbildung 20). Da f holomorph innerhalb des Rechtecks ist, folgt

$$0 = \int_{\Gamma_R} f(z) dz = \int_{-R}^R e^{-\pi x^2} dx - \int_{-R}^R e^{-\pi(x+ik)^2} dx + I_1 + I_2.$$

Dabei verschwinden die Integrale I_1 und I_2 im Grenzübergang $R \rightarrow \infty$:

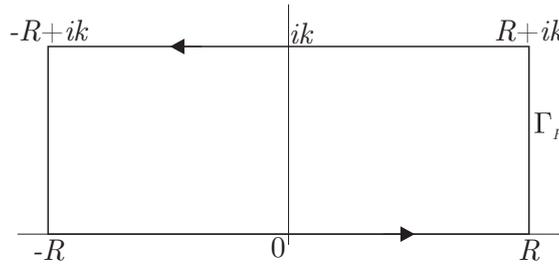


Abbildung 20: Ein Rechteck in der komplexen Ebene.

$$|I_1| \leq \int_0^k |e^{-\pi(R+it)^2}| dt \leq ce^{-\pi R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Analog $|I_2| \rightarrow 0$. Da $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1$ folgt

$$0 = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi kx} e^{\pi k^2} dx$$

$$e^{-\pi k^2} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-i2\pi kx} dx.$$

Also ist $f(x) = \hat{f}(x)$. □

2.5.5 Definition. Familie guter Kerne (auf \mathbb{R})

Es sei $\{K_\delta(x)\}$ eine Familie von Integrkernen auf \mathbb{R} . $\{K_\delta(x)\}$ heißt *Familie guter Kerne*, wenn

- (a) $\forall \delta > 0 : \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x) dx = 1$
- (b) $\exists M > 0 : \forall \delta > 0 : \int_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)| dx \leq M$
- (c) $\forall \eta > 0 : \int_{|x| \geq \eta} |K_\delta(x)| dx \rightarrow 0$ für $\delta \rightarrow 0$.

2.5.6 Theorem.

Definiere $K_\delta(x) := \frac{1}{\delta^{1/2}} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}}$, $\{K_\delta(x)\}$ ist Familie guter Kerne.

Beweis. Die ersten beiden Eigenschaften sind leicht zu zeigen, für die dritte wähle $\eta > 0$ beliebig, aber fest. Substituiere $y = \frac{x}{\delta^{1/2}}$

$$\frac{1}{\delta^{1/2}} \int_{|x| \geq \eta} e^{-\pi \frac{x^2}{\delta}} dx = \int_{|y| \geq \frac{\eta}{\delta^{1/2}}} e^{-\pi y^2} dy \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0.$$

□

2.5.7 Definition. Faltung (auf \mathbb{R})

Seien $f, g \in S(\mathbb{R})$. Die Faltung ist dann definiert als

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)dy.$$

2.5.8 Satz.

Seien $f, g \in S(\mathbb{R})$. Dann gilt

- (a) $f * g = g * f$
- (b) $f * g \in S(\mathbb{R})$
- (c) $\widehat{f * g}(k) = \hat{f}(k)\hat{g}(k)$

Beweis. Für (c): Durch die Substitution $z = x - y$ erhält man

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)e^{-i2\pi xk} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i2\pi yk} f(y)g(x-y)e^{-i2\pi(x-y)k} dy dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i2\pi yk} \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{-i2\pi zk} dz dy \\ &= \hat{f}(k)\hat{g}(k). \end{aligned}$$

□

2.5.9 Korollar.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Dann konvergiert $f * K_{\delta}(x) \rightarrow f(x)$ gleichmäßig für $\delta \rightarrow 0$.

Beweis. Da $f \in S(\mathbb{R})$ gilt für ein $\epsilon > 0$, $\exists R : |f(x)| < \epsilon$ für $|x| \geq R$. f ist auf dem Intervall $[-R, R]$ gleichmäßig stetig, wenn $\exists \eta > 0 : |f(x-y) - f(x)| < \epsilon$ für $|y| < \eta$. Da K_{δ} eine Familie guter Kerne ist, kann man schreiben

$$f * K_{\delta}(x) - f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} K_{\delta}(y)(f(x-y) - f(x))dy.$$

Schätze nun den Betrag ab:

$$\begin{aligned}
 |f * K_\delta(x) - f(x)| &\leq \int_{|y| \leq \eta} |K_\delta(y)(f(x-y) - f(x))| dy + \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)(f(x-y) - f(x))| dy \\
 &\leq \underbrace{\epsilon \int_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(y)| dy}_{=1} + \underbrace{M \int_{|y| \geq \eta} |K_\delta(y)| dy}_{\rightarrow 0 \text{ für } \delta \rightarrow 0}.
 \end{aligned}$$

□

2.5.10 Satz.

Seien $f, g \in S(\mathbb{R})$, dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)dy.$$

Beweis. Definiere $F(x, y) = f(x)g(y)e^{-i2\pi yx}$. Wenn nun F über x und y integriert wird, kann nach Fubini die Integrationsreihenfolge vertauscht werden:

$$\begin{aligned}
 \iint_{\mathbb{R}^2} F(x, y)d(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)dx \right) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)dy \right) dx \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{g}(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(y)g(y)dy
 \end{aligned}$$

□

2.5.11 Theorem.

Sei $f \in S(\mathbb{R})$, dann ist die Umkehrung der Fourier-Transformation gegeben durch

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)e^{i2\pi xk} dk.$$

Beweis. Definiere $G_\delta(x) := e^{-\pi x^2 \delta}$, die Fourier-Transformierte von G_δ ist $\hat{G}_\delta(k) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{k^2}{\delta}}$, denn definiert man $f(x) = e^{-\pi x^2}$ und verwendet, dass $\hat{f}(x) = f(x)$ und $\widehat{f(\delta x)}(k) = \frac{1}{\delta} \hat{f}\left(\frac{k}{\delta}\right)$ erhält man

$$\hat{G}_\delta(k) = \widehat{f(\sqrt{\delta}x)}(k) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \hat{f}\left(\frac{k}{\sqrt{\delta}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi \frac{k^2}{\delta}} = K_\delta(k).$$

Zeige zuerst, dass $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)dk$ gilt. Verwende Satz 2.5.10 und schreibe

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{G}_\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)G_\delta(k)dk \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k)dk.$$

Es gilt aber ebenso

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\hat{G}_\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)dx = f * K_\delta(0) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} f(0),$$

nach Korollar 2.5.9. Also gilt insgesamt $f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) dk$. Definiere nun eine Funktion $F(y) := f(x+y)$ und schreibe

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{F}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{i2\pi xk} dk.$$

Beim letzten Gleichheitszeichen wurde verwendet, dass

$$\begin{aligned} \hat{F}(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} F(y) e^{-i2\pi yk} dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-i2\pi yk} dy \\ &= e^{i2\pi xk} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y) e^{-i2\pi(x+y)k} dy = e^{i2\pi xk} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-i2\pi zk} dz \\ &= \hat{f}(k) e^{i2\pi xk}. \end{aligned}$$

□

2.5.12 Bemerkung.

Eine andere Schreibweise für die Fourier-Transformation ist $\hat{f}(k) = \mathcal{F}(f)(k) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi xk} dx$. Die Rücktransformation wird dann als $\mathcal{F}^{-1}(g)(x) = \mathcal{F}^*(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) e^{i2\pi xk} dk$ geschrieben. Dabei gilt auf $S(\mathbb{R})$ (auch auf $L^2(\mathbb{R})$), dass $\mathcal{F}^* \mathcal{F} = \text{Id}$ und $\mathcal{F} \mathcal{F}^* = \text{Id}$.

2.5.13 Theorem. Plancherel/Parseval

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\|f\|^2 = \|\hat{f}\|^2 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk.$$

Beweis. Definiere $f_-(x) := f(-x)$, wie weiter oben schon bewiesen gilt außerdem $g(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(k) dk$. Schreibe dann

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{f(x)} dx = f * \overline{f_-}(0) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f * f_-}(k) dk = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \widehat{\overline{f_-}}(k) dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk, \end{aligned}$$

denn es ist

$$\widehat{\overline{f_-}}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)} e^{-i2\pi xk} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)} e^{i2\pi xk} dx = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i2\pi xk} dx} = \overline{\hat{f}(k)}.$$

□

2.6 Anwendungsbeispiele von Fourier-Transformationen

2.6.1 Beispiel. Wärmeleitungsgleichung auf \mathbb{R}

Die Wärmeleitungsgleichung hat im Reellen in einer Dimension folgende Form:

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t).$$

Dabei bezeichnet $u(x, t)$ die Temperatur am Ort x zur Zeit t . Die Anfangstemperatur ist vorgegeben durch $u(x, 0) = f(x)$. Wendet man nun eine Fourier-Transformation auf beide Seiten an, nimmt die Gleichung folgende Form an:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(k, t) = -4\pi^2 k^2 \hat{u}(k, t)$$

Eine Separation der Variablen führt auf

$$\frac{\partial}{\partial t} \log \hat{u}(k, t) = -4\pi^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad \hat{u}(k, t) = \hat{A}(k) e^{-4\pi^2 k^2 t},$$

wobei $\hat{u}(k, 0) = \hat{A}(k) = \hat{f}(k)$. Also lautet die Lösung im k -Raum $\hat{u}(k, t) = \hat{f}(k) e^{-4\pi^2 k^2 t}$. Im x -Raum erhält man $u(x, t) = f * H_t(x)$ wobei

$$H_t(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{i2\pi k x} dk = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

der Wärmeleitungskern (Heat Kernel) ist. Die Lösung ist dann

$$\Rightarrow u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} dy = f * H_t(x).$$

Da H_t eine Familie guter Kerne ist, gilt $f * H_t(x) \rightarrow f(x)$ für $t \rightarrow \infty$.

2.6.2 Theorem. Poisson'sche Summenformel

Sei $f \in S(\mathbb{R})$. Dann gilt $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{i2\pi n x}$, für den Spezialfall $x = 0$ erhält man

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n).$$

Beweis. Definiere $F_1(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n)$, $F_2(x) := \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2\pi i n x}$. Man bemerkt zunächst, dass $F_2(x+1) = F_2(x)$, also F_2 periodisch mit Periode 1 ist. Weiterhin ist F_2 stetig, denn die Reihe konvergiert absolut, da die Fourier-Koeffizienten schnell genug abfallen ($f \in S(\mathbb{R})$). Die Fourier-Transformierte $\hat{f}(n)$ liefert also die Fourier-Koeffizienten der Reihenentwicklung von F_2 . F_1 ist ebenfalls periodisch mit Periode 1, denn

$$F_1(x+1) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n+1) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) = F_1(x).$$

Da $f \in S(\mathbb{R})$ ist auch F_1 stetig. Nun bleibt also zu zeigen, dass F_1 und F_2 dieselben Fourier-Koeffizienten haben, denn dann sind sie identisch auf $[0, 1]$. Substituiere dazu $y = x + n$ im Integral:

$$\begin{aligned}\hat{F}_1(m) &= \int_0^1 F_1(x) e^{-i2\pi mx} dx = \int_0^1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+n) e^{-i2\pi mx} dx \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^1 f(x+n) e^{-i2\pi mx} dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_n^{n+1} f(y) e^{-i2\pi my} \underbrace{e^{i2\pi mn}}_{=1} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i2\pi my} dy = \hat{f}(m).\end{aligned}$$

□

2.6.3 Theorem.

Sei $\psi \in S(\mathbb{R})$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1$. Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \int_{-\infty}^{\infty} 4\pi^2 k^2 |\hat{\psi}(k)|^2 dk \geq \frac{1}{4}.$$

Die Ungleichung gilt auch für $x \mapsto (x - x_0)$ und $k \mapsto (k - k_0)$.

Beweis. Aus der Normierungsbedingung erhält man mittels partieller Integration

$$1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d}{dx} |\psi(x)|^2 dx = - \int_{-\infty}^{\infty} x (\psi'(x) \overline{\psi(x)} + \psi(x) \overline{\psi'(x)}) dx.$$

Bildet man den Betrag dieses Ausdrucks und wendet die Dreiecksungleichung sowie die Cauchy-Schwarz-Ungleichung an, erhält man

$$1 \leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |\psi'(x)| |\psi(x)| dx \leq 2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 |\psi(x)|^2 dx \right)^{1/2} \underbrace{\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx \right)^{1/2}}_{= \left(\int_{-\infty}^{\infty} 4\pi^2 k^2 |\hat{\psi}(k)|^2 dk \right)^{1/2}}.$$

□

2.6.4 Theorem.

Betrachte ein Problem aus der mathematischen Physik: Ein Elektron befinde sich im Coulomb-Potential eines Kerns, $V(x) = -\frac{Z}{|x|}$. Seine Hamiltonfunktion ist $H(p, q) = \frac{1}{2m} p^2 - V(q)$. Die Konstanten seien folgendermaßen gewählt: $\hbar = e = 2m = 1$. Wir möchten nun zeigen, dass das Elektron nicht in den Kern fällt, dass also seine Energie eine untere Grenze besitzt, $E_0 = -\frac{1}{2} Z^2$. Dabei betrachten wir das Elektron als Wellenfunktion, deren Betrag als Wahrscheinlichkeitsdichte verstanden werden kann. Mathematisch formuliert wollen wir zeigen, dass

$$\inf \left\{ \|\psi\|_2^2 = 1 \mid \langle \psi | -\Delta + V | \psi \rangle \right\} \geq -cZ^2.$$

Beweis. Betrachte zuerst den Potentialterm:

$$\langle \psi | V \psi \rangle = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx = - \int_{|x| \leq R} \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx - \int_{|x| \geq R} \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx.$$

Da ψ normiert ist, lässt sich der Term mit $|x| \geq R$ abschätzen

$$\int_{|x| \geq R} \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx \leq \frac{Z}{R} \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^2 dx = \frac{Z}{R},$$

denn $|x| \geq R \Leftrightarrow \frac{Z}{|x|} \leq \frac{Z}{R}$. Für den Term mit $|x| \leq R$ verwenden wir die Hölder-Ungleichung, welche besagt, dass $\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Schätze also ab und setze $q = 3, p = \frac{3}{2}$:

$$\begin{aligned} \int_{|x| \leq R} \frac{Z}{|x|} |\psi(x)|^2 dx &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{Z}{|x|} \Big|_{|x| \leq R} |\psi(x)|^2 dx \\ &\leq \left\| \frac{Z}{|x|} \Big|_{|x| \leq R} \right\|_{3/2} \| |\psi(x)|^2 \|_3 \\ &= \left(\int_{|x| \leq R} \left(\frac{Z}{|x|} \right)^{3/2} dx \right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^6 dx \right)^{1/3} \\ &= Z \left(4\pi \int_{|x| \leq R} \frac{1}{|x|^{3/2}} dx \right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^6 dx \right)^{1/3} \\ &= Z (4\pi)^{2/3} \left(\frac{2}{3} R^{3/2} \right)^{2/3} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^6 dx \right)^{1/3} \\ &= \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{2/3} Z R \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^6 dx \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Verwende Lemma 2.6.5 um den gesamten Term abzuschätzen:

$$\begin{aligned} \langle \psi | -\Delta + V | \psi \rangle &\geq \|\nabla \psi\|_2^2 - \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{2/3} Z R \|\psi\|_6^2 - \frac{Z}{R} \\ &\geq \frac{1}{16} \|\psi\|_6^2 - \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{2/3} Z R \|\psi\|_6^2 - \frac{Z}{R} \\ &= \underbrace{\left(\frac{1}{16} - \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{2/3} Z R \right)}_{\stackrel{!}{=} 0} \|\psi\|_6^2 - \frac{Z}{R} \end{aligned}$$

Wähle nun $R = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{8\pi} \right)^{2/3} \frac{1}{Z}$, denn R war ja beliebig, und erhalte

$$\langle \psi | -\Delta + V | \psi \rangle \geq -16 \left(\frac{8\pi}{3} \right)^{2/3} Z^2.$$

□

2.6.5 Lemma. Sobolev-Ungleichung

Sei $\psi \in C_0^2(\mathbb{R}^3)$ (der Index 0 bedeutet „kompakter Träger“), dann gilt

$$\langle \psi | -\Delta \psi \rangle = \langle \nabla \psi | \nabla \psi \rangle = \|\nabla \psi\|_2^2 \geq c \|\psi\|_6^2.$$

Beweis. Zuerst stellt sich die Frage, für welche p die Ungleichung $\|\nabla \psi\|_2^2 \geq \|\psi\|_p^2$ gelten kann. Definiere dazu $\psi_\lambda(x) := \psi(\lambda x)$. Bilde die Norm von $\nabla \psi_\lambda$:

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi_\lambda(x)|^2 dx = \lambda^2 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(\lambda x)|^2 \frac{d(\lambda x)}{\lambda^3} = \lambda^{-1} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x)|^2 dx.$$

Für die p -Norm von ψ_λ erhält man

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi_\lambda(x)|^p dx \right)^{2/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\lambda x)|^p \frac{d(\lambda x)}{\lambda^3} \right)^{2/p} = \lambda^{-3 \frac{2}{p}} \|\psi\|_p^2.$$

Stelle nun die Ungleichung für ψ_λ auf:

$$\|\nabla \psi_\lambda\|_2^2 \geq \|\psi_\lambda\|_p^2 \Leftrightarrow \lambda^{-1} \|\nabla \psi\|_2^2 \geq \lambda^{-\frac{6}{p}} \|\psi\|_p^2.$$

Damit diese für beliebige λ erfüllt ist, müssen die Exponenten übereinstimmen, also muss $p = 6$ gelten. Zuerst zeigen wir, dass $\|\psi\|_{3/2} \leq \|\nabla \psi\|_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x)| dx$. Verwende den Hauptsatz der Integralrechnung, um zu schreiben $\psi(x, y, z) = \int_{-\infty}^x \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(x_1, y, z) dx_1$ und schätze den Betrag dieses Ausdrucks mithilfe der Dreiecksungleichung ab:

$$|\psi(x, y, z)| \leq \int_{-\infty}^x \left| \frac{\partial}{\partial x_1} \psi(x_1, y, z) \right| dx_1 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x_1, y, z)| dx_1.$$

Statt x kann man nun auch y oder z wählen und so insgesamt schreiben

$$|\psi(x, y, z)|^{3/2} \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x_1, y, z)| dx_1 \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x, y_1, z)| dy_1 \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x, y, z_1)| dz_1 \right)^{1/2}.$$

Diesen Ausdruck integrieren wir nun über den gesamten Raum, zuerst über x . Dabei kann der Ausdruck mit x_1 vor das Integral gezogen werden, da er konstant in x ist:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^{3/2} dx &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x_1, y, z)| dx_1 \right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x, y_1, z)| dy_1 \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x, y, z_1)| dz_1 \right)^{1/2} dx \\ &\leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x_1, y, z)| dx_1 \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x, y_1, z)| dy_1 dx \right)^{1/2} \\ &\quad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x, y, z_1)| dz_1 dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Dabei wurde die Cauchy-Schwarz-Ungleichung verwendet, welche besagt, dass

$$\int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(x)}g(x)dx \leq \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |g(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Gehe analog für y vor und erhalte

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, y, z)|^{3/2} dx dy \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x, y, z_1)| dx dy dz_1 \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla(x_1, y, z) dx_1 dy \right)^{1/2} \\ \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla \psi(x, y_1, z)| dx dy_1 \right)^{1/2}.$$

Integriert man nun noch über z ergibt sich

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^{3/2} d^3x \leq \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x, y, z)| d^3x \right)^{3/2} \\ \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x, y, z)|^{3/2} d^3x \right)^{2/3} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x, y, z)| d^3x \\ \|\psi\|_{3/2} \leq \|\nabla \psi\|_1.$$

Mit $\psi = |u(x)|^4$ schreibt man

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x)|^{3/2} dx \right)^{2/3} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla \psi(x)| dx \\ \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^6 dx \right)^{2/3} \leq \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u(x)|^4| dx \\ = 4 \int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^3 |\nabla |u(x)|| dx \\ \leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^6 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla |u(x)||^2 dx \right)^{1/2}.$$

Also gilt insgesamt

$$\left(\int_{\mathbb{R}^3} |u(x)|^6 dx \right)^{1/6} \leq 4 \left(\int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ \|u\|_6^2 \leq 16 \|\nabla u\|_2^2.$$

Also ist die Konstante aus der obigen Abschätzung $c = 16$. □