S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
30. April 2012

Fourieranalysis

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: Einige Fourierreihen

Bestimmen Sie die Fourierreihen der folgenden Funktionen, die Sie jeweils als 2π-periodisch fortgesetzte Funktionen auf $\mathbb{R}$ betrachten können. Vermeiden Sie, wenn möglich, explizite Integration.

a) $f(x) = x^2 \quad \text{für} \quad x \in [-\pi, \pi]$,

b) $g(x) = \sin^2(x) \quad \text{für} \quad x \in [-\pi, \pi]$,

c) $h(x) = x^2 \sin^2(x) \quad \text{für} \quad x \in [-\pi, \pi]$.

Aufgabe 2: Besselsche Ungleichung

Sei V ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise orthogonalen und normierten Vektoren. Zeigen Sie

a) $\sum_{n=1}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle$

b) Falls es eine Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in $\operatorname{span}(\{e_n | n \in \mathbb{N}\})$ gibt mit

$$\lim_{j\to\infty} \langle a_j - x, a_j - x \rangle = 0\,,$$

so gilt in (a) Gleichheit.

Aufgabe 3: Riemann-Lebesgue für Hölderstetige Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 2π-periodisch und α-Hölderstetig, d.h. $|f(x+h) - f(x)| \leq C|h|^\alpha$ für ein $C < \infty$, $\alpha > 0$ und alle $x, h \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass die Fourierkoeffezienten c_n von f der Ungleichung

$$|c_n| \leq \frac{\tilde{C}}{n^\alpha} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}$$

mit $\tilde{C} = \frac{C\pi^\alpha}{2}$ genügen.

Tipp: Machen Sie sich zunächst klar, dass

$$c_n = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{-inx} f(x + \tfrac{\pi}{n})$$

gilt.

Aufgabe 4: Konvergenzbegriffe

Wiederholen Sie die Begriffe der punktweisen und gleichmäßigen Konvergenz von Funktionenfolgen und die diversen Konvergenzkriterien und Konvergenzbegriffe für Reihen, die Sie in Ihrer ersten Analysis Vorlesung gelernt haben.

Abgabe: Bis Freitag, 4. Mai um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.