S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
10. Juli 2012

Fourieranalysis

Übungsblatt 10

Aufgabe 28: Unitäre Gruppen mit beschränkten Erzeugern

Sei $\mathcal{H}$ Hilbertraum und $H \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Zeigen Sie, dass

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}Ht} \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\mathrm{i}Ht)^n}{n!}$$

eine von $(H, \mathcal{H})$ erzeugte unitäre Gruppe definiert, die in t uniform differenzierbar ist.

Aufgabe 29: Die Gruppe der Streckungen

Sei $U_S : t \to \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}))$ gegeben durch

$$(U_S(t)f)(x) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2}} f(\mathrm{e}^{-t}x)\,.$$

Zeigen Sie, dass U_S eine stark-stetige unitäre Gruppe ist und bestimmen Sie den Erzeuger S und seine Domäne $D(S)$.

Aufgabe 30: Satz von Rellich

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt. Wir definieren

$$H^m(\Omega) := \{\psi|_\Omega \mid \psi \in H^m(\mathbb{R}^d)\} \quad \text{und} \quad H^1_0(\Omega) := \{\psi \in H^1(\Omega) \mid \operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass die Einbettung von $H^1_0(\Omega)$ nach $L^2(\Omega)$ kompakt ist (Satz von Rellich), d.h. jede Folge (ψ_n), die in $H^1_0(\Omega)$ unabhängig von n beschränkt ist, besitzt eine Teilfolge, die in $L^2(\Omega)$ stark konvergiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

a) Finden Sie ein Skalarprodukt, dass $H^1(\mathbb{R}^d)$, $H^1(\Omega)$ und $H^1_0(\Omega)$ jeweils zu einem Hilbertraum macht. Beschaffen Sie sich nun eine in $H^1_0(\Omega)$ schwach konvergente Teilfolge.

b) Zeigen Sie unter Ausnutzung des kompakten Trägers, dass für diese Teilfolge die Fouriertransformierte punktweise konvergiert.

c) Zeigen Sie nun die L^2-Konvergenz der Fouriertransformierten auf $B_R = \{k \in \mathbb{R}^d \mid |k| \leq R\}$ für jedes $R > 0$.

d) Zeigen Sie auch die L^2-Konvergenz der Fouriertransformierten auf dem Komplement von B_R.

e) Setzten Sie alles zusammen um den Satz von Rellich zu folgern.

Abgabe: Bis Montag, 16. Juli um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.