S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
8. Mai 2012

Fourieranalysis

Übungsblatt 2

Aufgabe 5: Die Wärmeleitungsgleichung

Bestimmen Sie die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

auf dem Intervall $[0,\ell]$ zur Anfangsbedingung

$$u(0,x) = u_0(x) = 1 - \cos(x\,\tfrac{2\pi}{\ell})$$

a) einmal mit Dirichlet Randbedingungen, d.h. $u(t,0) = u(t,\ell) = 0$ für alle $t \geq 0$,

b) und einmal mit Neumann Randbedingungen, d.h. $\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,\ell) = 0$ für alle $t \geq 0$.

Wie sieht jeweils das asymptotische Verhalten für $t \to \infty$ aus? Was bedeuten die Randbedingungen physikalisch?

Aufgabe 6: Die Schrödingergleichung

Bestimmen Sie die Lösung der Schrödingergleichung

$$\mathrm{i}\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(t,x)$$

auf dem Intervall $[0,\ell]$ zur Anfangsbedingung

$$u(0,x) = u_0(x) = 1 - \cos(x\,\tfrac{2\pi}{\ell})$$

a) einmal mit Dirichlet Randbedingungen, d.h. $u(t,0) = u(t,\ell) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$,

b) und einmal mit Neumann Randbedingungen, d.h. $\partial_x u(t,0) = \partial_x u(t,\ell) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7: Faltung

Es seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ zwei lokal integrierbare und 2π-periodische Funktionen. Die Faltung $h = f*g$ ist definiert durch

$$h(x) = (f*g)(x) := \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\,g(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Zeigen Sie, dass h wieder 2π-periodisch ist und drücken Sie die Fourierkoeffizienten von h durch diejenigen von f und g aus.

Abgabe: Bis Montag, 14. Mai um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.