S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
15. Mai 2012

Fourieranalysis

Übungsblatt 3

Aufgabe 8: Riemann-Lebesgue Lemma

Aus der Besselschen Ungleichung folgt, dass die Fourierkoeffizienten c_n einer Funktion $f \in L^2([-\pi,\pi])$ eine Nullfolge bilden. Zeigen Sie, dass dies auch für $f \in L^1([-\pi,\pi])$ gilt.

Zeigen Sie dazu zunächst, dass für $f \in L^1([-\pi,\pi])$ gilt

$$|c_n| \leq \|f\|_1 \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{Z}.$$

Machen Sie sich klar, dass es daher reicht, die Aussage für eine dichte Teilmenge von L^1 zu zeigen. Wie sieht man leicht, dass $L^2([-\pi,\pi])$ dicht in $L^1([-\pi,\pi])$ liegt?

Aufgabe 9: Die Isoperimetrische Ungleichung

Es sei $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi \mapsto \gamma(t) = (x(t), y(t))$ eine geschlossene stetig differenzierbare Kurve. Es sei weiterhin

$$\ell(\gamma) := \int_0^{2\pi} \left(x'(s)^2 + y'(s)^2\right)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}s$$

die Länge der Kurve und

$$\mathcal{A}(\gamma) := \frac{1}{2} \left| \int_0^{2\pi} (x(s)\, y'(s) - y(s)\, x'(s))\, \mathrm{d}s \right|$$

die eingeschlossene Fläche. Zeigen Sie, dass

$$\mathcal{A} \leq \frac{\ell^2}{4\pi}$$

gilt, wobei Gleichheit nur für Kreise gilt.

Anleitung: Machen Sie sich klar, dass es ausreicht den Fall $\ell = 2\pi$ zu betrachten und γ durch die Bogenlänge zu parametrisieren, d.h.

$$\left(x'(s)^2 + y'(s)^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 \qquad \text{für alle } s \in [0,2\pi]$$

zu fordern. Zeigen Sie nun die Isoperimetrische Ungleichung, indem Sie ℓ und $\mathcal{A}$ durch die Fourierkoeffizienten der periodischen Funktionen x und y ausdrücken.

Aufgabe 10: Faltung

Zeigen Sie, dass die Faltung $*$ aus Aufgabe 7 sowohl $L^1([-\pi,\pi])$ als auch $L^2([-\pi,\pi])$ zu einer kommutativen Algebra macht, d.h. die Abbildung

$$* : L^p \times L^p \to L^p\,, \quad (f,g) \mapsto f * g$$

ist wohldefiniert und bilinear für $p = 1,2$. Zeigen Sie, dass $(L^1, *)$ sogar eine Banach-Algebra ist, d.h. es gilt

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1\,.$$

Bestimmen Sie alle irreduziblen Elemente von $(L^2, *)$, d.h. alle Funktionen $f \in L^2$ die sich nicht als Produkt $f = f_1 * f_2$ für $f_1, f_2 \in L^2$ schreiben lassen.

Abgabe: Bis Montag, 21. Mai um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.