S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
22. Mai 2012

Fourieranalysis

Übungsblatt 4

Aufgabe 11: Parseval

Zeigen Sie für $\alpha \notin \mathbb{Z}$ die Identität

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(n-\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{(\sin \pi\alpha)^2}\,. \qquad (*)$$

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Fourierreihe der Funktion $f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x-\pi)\alpha}$.

Bestimmen Sie aus $(*)$ auch den Wert der Reihe

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}\setminus\alpha} \frac{1}{(n-\alpha)^2} \qquad \text{für } \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Aufgabe 12: Wirtinger Ungleichung

Es sei $f \in \mathrm{PS}(\mathbb{R}) \cap C(\mathbb{R})$ T-periodisch und $\int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Zeigen Sie, dass

$$\int_0^T |f(t)|^2\,\mathrm{d}t \le \frac{T^2}{4\pi^2} \int_0^T |f'(t)|^2\,\mathrm{d}t\,.$$

Für welche Funktionen gilt Gleichheit?

Aufgabe 13: Fouriertransformation 1

Berechnen Sie jeweils die Fouriertransformierte:

a) $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$

b) $g(x) = \chi_{[-1,1]}(x) \cdot (1 - |x|)$

Aufgabe 14: Fouriertransformation 2

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ eine Schwartzfunktion, $h \in \mathbb{R}^d$ und $\delta > 0$. Drücken Sie jeweils die Fouriertransformierte der folgenden Funktionen durch die Fouriertransformierte $\hat{f}$ bzw. $\check{f}$ von f aus:

a) $g_1(x) = f(x+h)$

b) $g_2(x) = f(\delta x)$

c) $g_3(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot h}$

d) $g_4(x) = \partial_{x_j} f(x)$

e) $g_5(x) = x_j\, f(x)$

f) $g_6(x) = \overline{f}(x)$

Abgabe: Bis Montag, 28. Mai um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.