S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
5. Juni 2012

Fourieranalysis

Übungsblatt 5

Aufgabe 15: Poissonsche Summenformel

Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und $\hat{f}$ die Fouriertransformierte. Zeigen Sie, dass $F_1(x) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+n)$ eine glatte, 1-periodische Funktion definiert und

$$F_1(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) \mathrm{e}^{2\pi \mathrm{i} n x}$$

erfüllt.

Aufgabe 16: Fouriertransformierte einer Gaußfunktion

Sei $a \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a < 0$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f(x) := \mathrm{e}^{-ax^2/2}$. Zeigen Sie, dass $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt und $\hat{f}$ gegeben ist durch

$$\hat{f}(k) = a^{-1/2} \mathrm{e}^{-k^2/2a} .$$

Aufgabe 17: Frécheträume

Sei X ein Vektorraum. Eine Halbnorm auf X ist eine Abbildung $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$, so dass für $\alpha \in \mathbb{K}$ und $x, y \in X$ gilt:

- $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Sei $\{\|\cdot\|_k ; k \in \mathbb{N}\}$ eine abzählbare Familie von Halbnormen auf X. Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung an mit der Sie beweisen können, dass

$$\mathrm{d}(x, y) := \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} \frac{\|x - y\|_k}{1 + \|x - y\|_k}$$

eine Metrik auf X definiert.

Abgabe: Bis Montag, 11. Juni um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.