S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
12. Juni 2012

Fourieranalysis
Übungsblatt 6

Aufgabe 18: Dilatationen

Sei $p \in [1, \infty)$, $\sigma > 0$ und $D^p_\sigma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $f(x) \mapsto (D^p_\sigma f)(x) := \sigma^{-d/p} f(x/\sigma)$ die L^p-Dilatation mit σ.

a) Zeigen Sie, dass $D^p_\sigma : \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ stetig und $\|D^p_\sigma f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)}$ ist.
Erinnerung: Die L^p-Norm ist $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} := \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{1/p}$.

b) Berechnen Sie $\mathcal{F} D^2_\sigma f$ und interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Wie muss man $\tilde{D}^p_\sigma : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ definieren, wenn man D^p_σ fortsetzen will?

Aufgabe 19: Faltung

Sei $f \in C(\mathbb{R}^d)$ beschränkt und $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ mit $\varphi \geq 0$ und $\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R}^d)} = 1$. Setze $f_\sigma := f * (D^1_\sigma \varphi)$, wobei D^1_σ die L^1-Dilatation aus Aufgabe 18 ist.

a) Zeigen Sie, dass $f_\sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $f_\sigma(x) \xrightarrow{\sigma \to 0} f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

c) Zeigen Sie, dass die Konvergenz in b) auf jedem Kompaktum gleichmäßig ist.
Tipp: Zerlegen Sie das Integral in $B_\delta(x)$ und $\mathbb{R}^d \setminus B_\delta(x)$ und wählen Sie δ geeignet!

Aufgabe 20: Die Wellengleichung im $\mathbb{R}^d$

Seien $f_0, g_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Bestimmen Sie die Lösung der skalaren Wellengleichung

$$\partial_t^2 f(t,x) = \Delta_x f(t,x) \qquad \text{für alle } (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

mit Anfangsdaten

$$f(0,x) = f_0(x) \quad \text{und} \quad \partial_t f(t,x)|_{t=0} = g_0(x) \qquad\qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^d$$

mit Hilfe der Fouriertransformation und geben Sie sie in der Form

$$f(t,x) \;=\; \int_{\mathbb{R}^d} \left(\hat{f}_0(k) F_1(t,k) + \hat{g}_0(k) F_2(t,k)\right) \mathrm{e}^{ik\cdot x} \, \mathrm{d}k$$

mit expliziten Funktionen $F_1, F_2 : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ an.

Abgabe: Bis Montag, 18. Juni um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.