S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
19. Juni 2012

# Fourieranalysis

Übungsblatt 7

## Aufgabe 21: Die Heavyside-Distribution

Sei $\Theta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die sogenannte Heavyside-Funktion, d.h.

$$\Theta(x) \;=\; \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

und $T_\Theta$ die zugehörige Distribution.

a) Berechnen Sie die Fouriertransformierte $\widehat{T}_\Theta$ von $T_\Theta$.

b) Berechnen Sie die distributionellen Ableitungen $\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} T_\Theta$ von $T_\Theta$ zu beliebiger Ordnung.

## Aufgabe 22: Der Impulsoperator und die Asymptotik der freien Schrödingergleichung

Sei $\psi(t)$ die Lösung der freien Schrödinger-Gleichung mit $\psi(0) = \psi_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\psi(t,x) = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{x^2}{2t}}}{(\mathrm{i}t)^{\frac{d}{2}}}\, \widehat{\psi}_0\left(\tfrac{x}{t}\right) + r(t,x)$$

mit $\lim_{t\to\infty} \|r(t)\|_{L^2} = 0$.

b) Physikalisch hat $|\psi(t,x)|^2$ die Bedeutung einer Wahrscheinlichkeitsdichte für die Konfiguration $X(t)$ des Systems zum Zeitpunkt $t$, d.h. die Wahrscheinlichkeit, dass $X(t)$ in einer messbaren Menge $\Lambda \subset \mathbb{R}^d$ liegt, ist

$$P(X(t) \in \Lambda) = \int_\Lambda |\psi(t,x)|^2 \mathrm{d}x\,.$$

Hierbei wird immer $\|\psi(t)\|_{L^2} = 1$ angenommen.

Zeigen Sie mit Hilfe der Asymptotik aus (a), dass für $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$

$$\lim_{t\to\infty} P\left(\frac{X(t)}{t} \in \Gamma\right) = \int_\Gamma |\widehat{\psi}_0(k)|^2 \,\mathrm{d}k\,.$$

Die “Impulsverteilung” $|\widehat{\psi}_0(k)|^2$ ist also die Verteilung der asymptotischen Geschwindigkeit unter der freien Schrödinger-Zeitentwicklung.

*Tipp: Machen Sie sich klar, dass* $P\left(\frac{X(t)}{t} \in \Gamma\right) = P\left(X(t) \in t\Gamma\right)$ *gilt.*

c) Berechnen Sie den Erwartungswert der asymptotischen Geschwindigkeit. Warum nennt man $P := -\mathrm{i}\nabla_x$ den Impulsoperator?

**Abgabe: Bis Montag, 25. Juni um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.**