S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
26. Juni 2012

Fourieranalysis

Übungsblatt 8

Aufgabe 23: Riemann-Lebesgue-Lemma

a) Zeigen Sie, dass $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ mit der Supremumsnorm ein Banachraum ist.

Erinnerung: $C_\infty(\mathbb{R}^d)$ ist der Raum der abfallenden stetigen Funktionen,

$$C_\infty(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \in C(\mathbb{R}^d) \,|\, \forall \varepsilon > 0 \; \exists K \subset \mathbb{R}^d \text{ kompakt, sodass } \sup_{x \notin K} |f(x)| < \varepsilon \right\} .$$

b) Zeigen Sie das Lemma von Riemann-Lebesgue:

$$\mathcal{F} L^1(\mathbb{R}^d) \;\subset\; C_\infty(\mathbb{R}^d).$$

Zeigen Sie dazu zunächst die Stetigkeit von $\mathcal{F} : (\mathcal{S}(\mathbb{R}^d), \|\,.\,\|_{L^1(\mathbb{R}^d)}) \to C_\infty(\mathbb{R}^d)$. Nutzen Sie dann die Dichtheit von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ in $L^1(\mathbb{R}^d)$ und den Fortsetzungssatz aus der Vorlesung, um $\mathcal{F}$ stetig auf L^1 fortzusetzen. Warum stimmt diese Fortsetzung mit dem durch die übliche Formel gegebenen $\mathcal{F}$ überein?

Aufgabe 24: Fouriertransformation und analytische Funktionen

Sei $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ eine glatte Funktion mit kompaktem Träger. Zeigen Sie zunächst, dass sich die Fouriertransformierte $\hat{f}$ zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion fortsetzen läßt. Zeigen Sie weiterhin, dass aus $\operatorname{supp} f \subset [-R, R]$ folgt, dass für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ ein $C_N < \infty$ existiert mit

$$|\hat{f}(z)| \;\leq\; \frac{C_N \, \mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}(z)|}}{(1 + |z|)^N} \, .$$

Zeigen Sie schließlich, dass auch die Umkehrung gilt: sei g eine auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion die

$$|g(z)| \;\leq\; \frac{C_N \, \mathrm{e}^{R|\mathrm{Im}(z)|}}{(1 + |z|)^N}$$

für alle $N \in \mathbb{N}_0$ erfülle. Dann ist $\check{g} \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ mit $\operatorname{supp} \check{g} \subset [-R, R]$.

Abgabe: Bis Montag, 25. Juni um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.