S. Teufel, J. Lampart
Mathematisches Institut, Universität Tübingen

Sommersemester 2012
3. Juli 2012

Fourieranalysis
Übungsblatt 9

Aufgabe 25: Das Lemma von Sobolev

Der $m$te Sobolevraum $H^m(\mathbb{R}^d) \subset S'(\mathbb{R}^d)$, $m \in \mathbb{Z}$, ist die Menge derjenigen temperierten Distributionen $f \in S'(\mathbb{R}^d)$, für die $\hat{f}$ eine messbare Funktion ist und

$$(1 + |k|^2)^{m/2} \hat{f}(k) \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

gilt.

a) Zeigen Sie, dass für $m \geq 0$ gilt $H^m(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$.

b) Sei $f \in H^m(\mathbb{R}^d)$ und $\ell < m - \frac{d}{2}$. Verwenden Sie das Lemma von Riemann-Lebesgue um zu zeigen, dass alle distributionellen Ableitungen $\partial^\alpha f$ mit $|\alpha| \leq \ell$ stetige Funktionen sind.

c) Folgern Sie daraus, dass $f \in C^\ell(\mathbb{R}^d)$ gilt.

Aufgabe 26: Schwache Kompaktheit in Hilberträumen

Sei $\mathcal{H}$ ein separabler Hilbertraum und (ψ_n) eine Folge in $\mathcal{H}$ mit $\|\psi_n\| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass (ψ_n) eine schwach konvergente Teilfolge besitzt.

Tipp: Satz von Bolzano-Weierstraß und Diagonalfolgenargument!

Aufgabe 27: Schwach konvergente Folgen in $L^2(\mathbb{R})$

Geben Sie Beispiele für Folgen (f_n) in $L^2(\mathbb{R})$ an, die schwach gegen Null konvergieren, $\|f_n\| = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und jeweils folgende Bedingungen erfüllen:

a) $\mathrm{supp} f_n \subset [0, 1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$

b) $\lim_{n \to \infty} \int_K |f_n(x)|^2 \mathrm{d}x = 0$ für jedes Kompaktum $K \subset \mathbb{R}$.

In welchem der Fälle kann man $f_n \in C^1(\mathbb{R})$ so wählen, dass $f_n' \in L^2(\mathbb{R})$ beschränkt bleibt?

Abgabe: Bis Montag, 25. Juni um 10.00 Uhr im Briefkasten von Herrn Lampart.