Universität Tübingen

Skript zur Vorlesung

Fourieranalysis

von Stefan Teufel im Sommersemester 2012

Dieses Skript bis auf einige Korrekturen und Ergänzungen eine LaTeX-Mitschrift meiner Vorlesung im Sommersemester 2005 von G. Diemant. Ihm sei an dieser Stelle dafür herzlichst gedankt.

Mathematisches Institut

Inhaltsverzeichnis

Diese Vorlesung richtet sich an die Hörer der Vorlesungen Mathematik für Physiker IV und Analysis IV und liefert eine anwendungsorientierte Einführung in die Fourieranalysis. Ziel ist es anhand des Leitthemas Fourieranalysis die Konzepte und Resultate aus der Maß- und Integrationstheorie einzuüben und anzuwenden und auch einen Einblick in weitere Themen wie lineare partielle Differentialgleichungen sowie Distributionen zu geben.

Literatur:
Die meisten Lehrbücher zur Analysis
H. Fischer, H. Kaul, Band 2
G. Folland, Fourier analysis and its applications
M. Reed, B. Simon, Methods of modern mathematical physics II
R. Edwards, Fourier series (zweibändig)
A. Deitmar, A first course in harmonic analysis

Einleitung

Unter dem Begriff *Fourieranalysis* faßt man eine ganze Reihe verwandter Techniken zur Zerlegung von allgemeinen Funktionen in Summen oder Integrale einfacher Funktionen zusammen. Methoden der Fourieranalysis spielen eine wichtige Rolle in vielen Bereichen der angewandten aber auch der reinen Mathematik. Die Anwendungsbeispiele dieser Vorlesung kommen fast ausschließlich aus dem Bereich der Physik.

Wir beginnen mit einem Standardbeispiel, welches die Grundideen und Grundfragen die bei der Fourierzerlegung auftauchen verdeutlicht.

Beispiel (Wärmeleitung in einer Dimension)**:**
Physikalische Situation: Dünner Metalldraht der Länge l, außen isoliert, an den Enden in thermischem Kontakt mit einem Wärmebad der festen Temperatur T_0. Ohne Einschränkung können wir $T_0 = 0$ wählen.

Sei $u(x,t)$ die Temperatur des Drahtes an der Stelle $x \in [0, l]$ zum Zeitpunkt $t \in [0,\infty)$, also

$$u\colon \underbrace{[0, l]}_{\text{Ort}} \times \underbrace{[0,\infty)}_{\text{Zeit}} \to \mathbb{R}\,.$$

Die Funktion $u(x,t)$ erfüllt die Wärmeleitungsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x,t) = \kappa \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x,t)\,, \tag{WLG}$$

wobei κ eine materialspezifische Konstante ist. Das ist eine *lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten*.

Da die Temperatur an den Enden fixiert ist, gelten die *Randbedingungen*

$$u(0,t) = u(l,t) = T_0 \qquad \forall t \in [0,\infty)\,.$$

Wir interessieren uns für Lösungen von (WLG) für $t > 0$, wobei wir $u(x,0) = u_0(x)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ als vorgegeben betrachten. Das sind die sogenannten *Anfangsdaten* (oder *Anfangsbedingungen*).

In Kurzform lautet unser Problem:

$$\text{(AWP)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \kappa\, \partial_x^2\, u; \quad u(0,t) = u(l,t) = T_0 = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

So schreibt man üblicherweise ein *Anfangswertproblem* (auch *Cauchyproblem* oder *initial value problem*).

Lösungsmethode: "Trennung der Variablen"

Der Ansatz

$$u(x,t) = X(x)T(t)$$

eingesetzt in (AWP) liefert

$$X(x)T'(t) = \kappa\, X''(x)T(t) \quad \text{und} \quad X(0) = X(l) = 0\,.$$

Teilt man beide Seiten durch $\kappa\, X(x)T(t)$ erhält man

$$\frac{T'(t)}{\kappa\, T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}\,.$$

Hier hängt die linke Seite nur noch von t ab und die rechte Seite nur noch von x. Da beide Seiten für alle x und t gleich sind, müssen sie konstant sein. Wir setzen

$$\frac{T'(t)}{\kappa\, T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -A \in \mathbb{R}\,,$$

und erhalten zwei gewöhnliche Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} T'(t) &= -\kappa\, A\, T(t) \\ X''(x) &= -A\, X(x)\,. \end{aligned}$$

Die allgemeinen Lösungen kann man direkt hinschreiben:

$$\begin{aligned} T(t) &= C_0\,\mathrm{e}^{-\kappa A t} \\ X(x) &= C_1 \cos(\sqrt{A}x) + C_2 \sin(\sqrt{A}x)\,. \end{aligned}$$

Die Randbedingung $X(0) = 0$ impliziert $C_1 = 0$ und die Randbedingung $X(l) = 0$ impliziert $\sin(\sqrt{A}l) = 0$, also $\sqrt{A}l = n\pi$ beziehungsweise $A = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ für ein $n \in \mathbb{Z}$.

Wir erhalten so die Familie von Lösungen

$$u_n(x,t) = T_n(t)X_n(x) = \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right), \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Wir haben $C_0 = C_2 = 1$ gesetzt, da wegen der Linearität von (AWP) jedes skalare Vielfache einer Lösung wieder eine Lösung ist.
Außerdem liefert $n = 0$ nur die triviale Lösung und $-n$ statt n ändert nur das Vorzeichen (also auch wieder ein skalares Vielfaches).

Aufgrund der Linearität der Gleichung sind Linearkombinationen von Lösungen wieder Lösungen. Also ist für jede Folge (a_n) in $\mathbb{R}$ auch

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{l}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

zumindest formal wieder eine Lösung. Falls wir nun die a_n so wählen können, dass

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \stackrel{!}{=} u_0(x)$$

gilt, so haben wir unser (AWP) gelöst.

Es stellen sich also folgende Fragen:

- Welche Funktionen $u_0(x)$ können wir in eine Sinus-Reihe entwickeln?
- In welchem Sinne konvergiert die Reihe?
- Können wir die Reihe gliedweise differenzieren um eine „echte“ Lösung von (AWP) zu erhalten?

1 Fourierreihen

In diesem Kapitel betrachten wir periodische Funktionen auf $\mathbb{R}$ (entspricht Funktionen auf einem Intervall, die man ja einfach periodisch fortsetzen kann). Um die Formeln übersichtlich zu halten, wählen wir als Periode 2π. Sei also im Folgenden immer $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(\theta + 2\pi) = f(\theta)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$.

Wir möchten verstehen, welche Funktionen f man in eine Reihe der Form

$$f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right)$$

entwickeln kann und in welchem genauen Sinne die Reihe konvergiert.

Mit $\cos(n\theta) = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right)$ und $\sin(n\theta) = \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right)$ können wir äquivalent auch schreiben

$$f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} := c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + c_{-n}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\right) \tag{$*$}$$

wobei $c_0 = \frac{1}{2}a_0$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n - \mathrm{i}b_n)$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + \mathrm{i}b_n)$ für $n \in \mathbb{N}$. Der Grund für die Schreibweise $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ statt $\sum_{n\in\mathbb{Z}}$ ist, dass die Summationsreihenfolge i.A. wichtig sein wird. Die Schreibweise $\sum_{n=-\infty}^{\infty}$ bezeichnet diejenige Summationsreihenfolge, die sich aus der entsprechenden Sinus-Kosinus-Reihe ergibt.

Da die Ableitungsformel $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})' = \mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ und die Multiplikation $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta+\varphi)}$ viel einfacher sind als die entsprechenden Formeln für Sinus und Kosinus, arbeiten wir im Folgenden mit $(*)$.

Angenommen, man kann ein gegebenes $f(\theta)$ in der Form $(*)$ schreiben. Wie kann man dann die Koeffizienten c_n bestimmen?

Die *erstaunlich simple Antwort* ist, man multipliziert $(*)$ mit $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}$, $m \in \mathbb{Z}$ und integriert über eine Periode

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, f(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta} \overset{\text{(NR)}}{=} 2\pi\, c_m$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{c_m = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, f(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}} \tag{FK}$$

Nebenrechnung (NR):

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta} = \begin{cases} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-m)\theta}}{\mathrm{i}(n-m)}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{(-1)^{(n-m)}-(-1)^{(n-m)}}{\mathrm{i}(n-m)} = 0 & \text{falls } n \neq m \\ 2\pi & \text{falls } n = m \end{cases}$$

$$=: 2\pi \, \delta_{n,m} \qquad \text{(Kronecker-Delta)}\,.$$

Also, falls f sich in der Form $(*)$ scheiben läßt (und falls wir Integral und Summe wirklich vertauschen dürfen), dann gilt die Formel (FK) für die Koeffizienten.

Allerdings können wir die Sache auch umdrehen und unabhängig von der Frage, ob $(*)$ wirklich gilt, die Fourierkoeffizienten der Funktion $f(\theta)$ durch die Formel (FK) definieren.

1.1 Definition (Fourierkoeffizienten und Fourierreihe)**:**
Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodisch mit Periode 2π und (Riemann)-integrierbar auf $[-\pi, \pi]$. Dann heißen die Zahlen

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} f(\theta)\,, \qquad n \in \mathbb{Z}\,, \tag{FK}$$

die *Fourierkoeffizienten* von f und

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} \tag{FR}$$

heißt die *Fourierreihe* von f.

Bemerkung: Für die Koeffizienten a_n, b_n findet man

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \, f(\theta) \cos(n\theta)$$

$$b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \, f(\theta) \sin(n\theta)$$

Nun können wir unsere Fragen aus der Einleitung präzisieren:

- Für welche Funktionen $f(\theta)$ konvergiert die zugehörige Fourierreihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$?

- Gegen welche Funktion konvergiert sie?
- In welchem Sinne konvergiert sie?

Bevor wir die ersten Fourierreihen berechnen, studieren wir zunächst den Zusammenhang zwischen Symmetrien der Funktion f und dem Verhalten der Fourierkoeffizienten. Dazu nehmen wir ab jetzt immer an, dass f integrierbar ist.

1.2 Lemma:
Falls f periodisch ist mit Periode P, dann ist

$$\int_a^{a+P} \mathrm{d}x\, f(x)$$

unabhängig von a.

Beweis: Definiere

$$g(a) = \int_a^{a+P} \mathrm{d}x\, f(x) = \int_0^{a+P} \mathrm{d}x\, f(x) - \int_0^{a} \mathrm{d}x\, f(x)$$

$\Rightarrow g'(a) = f(a+P) - f(a) = 0$, also g konstant. $\square$

1.3 Lemma:
Falls f gerade ist (das heißt $f(\theta) = f(-\theta)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$), dann gilt

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, f(\theta) \cos(n\theta) \quad \textit{und} \quad b_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Falls f ungerade ist (das heißt $f(\theta) = -f(-\theta)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$), dann gilt

$$a_n = 0 \quad \textit{und} \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\, f(\theta) \sin(n\theta) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 .$$

Bemerkung: Der konstante Term der Fourierreihe $c_0 = \frac{1}{2} a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, f(\theta)$ ist einfach der Mittelwert der Funktion auf einem Intervall der Länge 2π.

1.4 Beispiel:
Sei f die 2π-periodische Funktion mit $f(\theta) = |\theta|$ für $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Da f gerade ist, gilt nach Lemma 1.3, dass $b_n = 0$ und

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta\, f(\theta) \cos(n\theta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \theta \cos(n\theta)\,.$$

Also ist $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \theta = \frac{2}{\pi} \frac{\pi^2}{2} = \pi$ und für $n > 0$ ist (mit partieller Integration)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \theta \cos(n\theta) = \\ &= \underbrace{\frac{2}{\pi} \frac{\theta \sin(n\theta)}{n}\Big|_0^\pi}_{=0} - \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\theta\, \frac{\sin(n\theta)}{n} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{\cos(n\theta)}{n^2}\Big|_0^\pi = \frac{2}{\pi} \frac{(-1)^n - 1}{n^2} = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2} & \text{falls } n \text{ ungerade} \\ 0 & \text{falls } n \text{ gerade}\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Also ist die Fourierreihe von f

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\ldots} \frac{\cos(n\theta)}{n^2} = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^\infty \frac{\cos((2k-1)\theta)}{(2k-1)^2}$$

Die Reihe konvergiert absolut für alle $\theta \in \mathbb{R}$, da

$$\sum_{n=1,3,5,\ldots} \left| \frac{\cos(n\theta)}{n^2} \right| \le \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2} < \infty\,.$$

1.5 Beispiel:
Sei g die 2π-periodische Funktion mit $g(\theta) = \theta$ für $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Zur Abwechslung bestimmen wir diesmal die c_n's:

Für $n = 0$: $c_0 = \int_{-\pi}^\pi \mathrm{d}\theta\, \theta = 0$

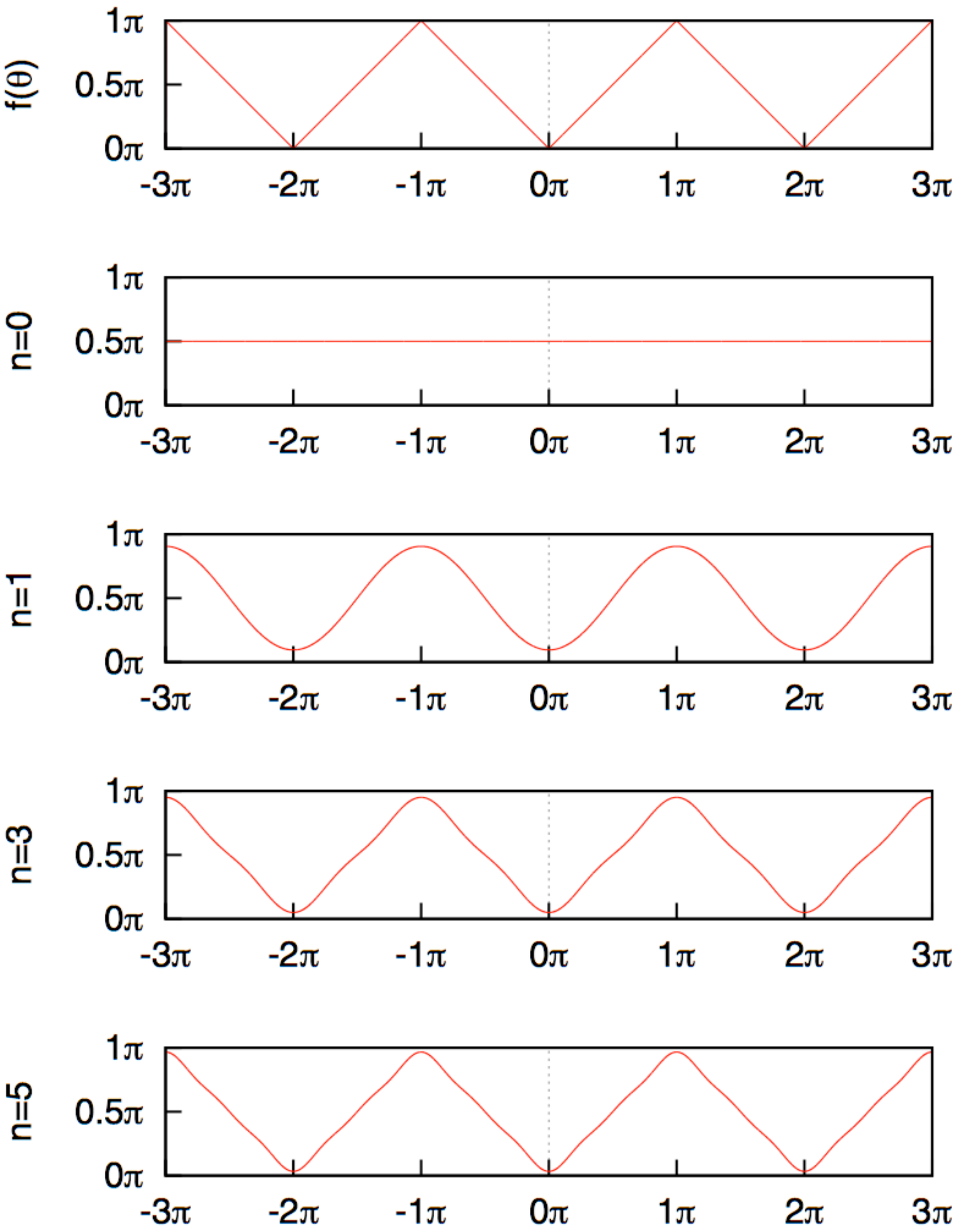

Abbildung 1: Einige Partialsummen $S_n^f(\theta)$ der Fourierreihe zu der in Beispiel 1.4 betrachteten Funktion $f(\theta) = |\theta|$.

Für $n > 0$:

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, \theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \\
&= \frac{1}{2\pi}\frac{\theta \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{-\mathrm{i}n}\bigg|_{-\pi}^{\pi} - \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{-\mathrm{i}n}}_{=0} = \frac{1}{2\pi}\frac{\pi \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi}}{-\mathrm{i}n} + \frac{1}{2\pi}\frac{\pi \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}}{-in} \\
&= -\frac{1}{2\mathrm{i}n}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\pi} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\pi}\right) = -\frac{1}{\mathrm{i}n}\cos(n\pi) = -\frac{(-1)^n}{\mathrm{i}n} = \frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{i}n}\,.
\end{aligned}$$

Die Fourierreihe von g ist also

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\mathrm{i}n}\,.$$

Diese Reihe konvergiert nirgends absolut, denn

$$\sum_{n\neq 0}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\right| = \sum_{n\neq 0}\frac{1}{n} = \infty\,.$$

Kombiniert man den n-ten und den $-n$-ten Term,

$$(-1)^{n+1}\left(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{\mathrm{i}n} + \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}}{-\mathrm{i}n}\right) = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin(n\theta)$$

erhählt man die Sinusreihe

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}\sin(n\theta)}{n}\,.$$

Auch diese konvergiert nicht überall absolut, denn z.B. bei $\theta = \pi/2$ ist

$$2\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n\pi/2)}{n}\right| = 2\sum_{n\,\text{ungerade}}\frac{1}{n} = \infty\,.$$

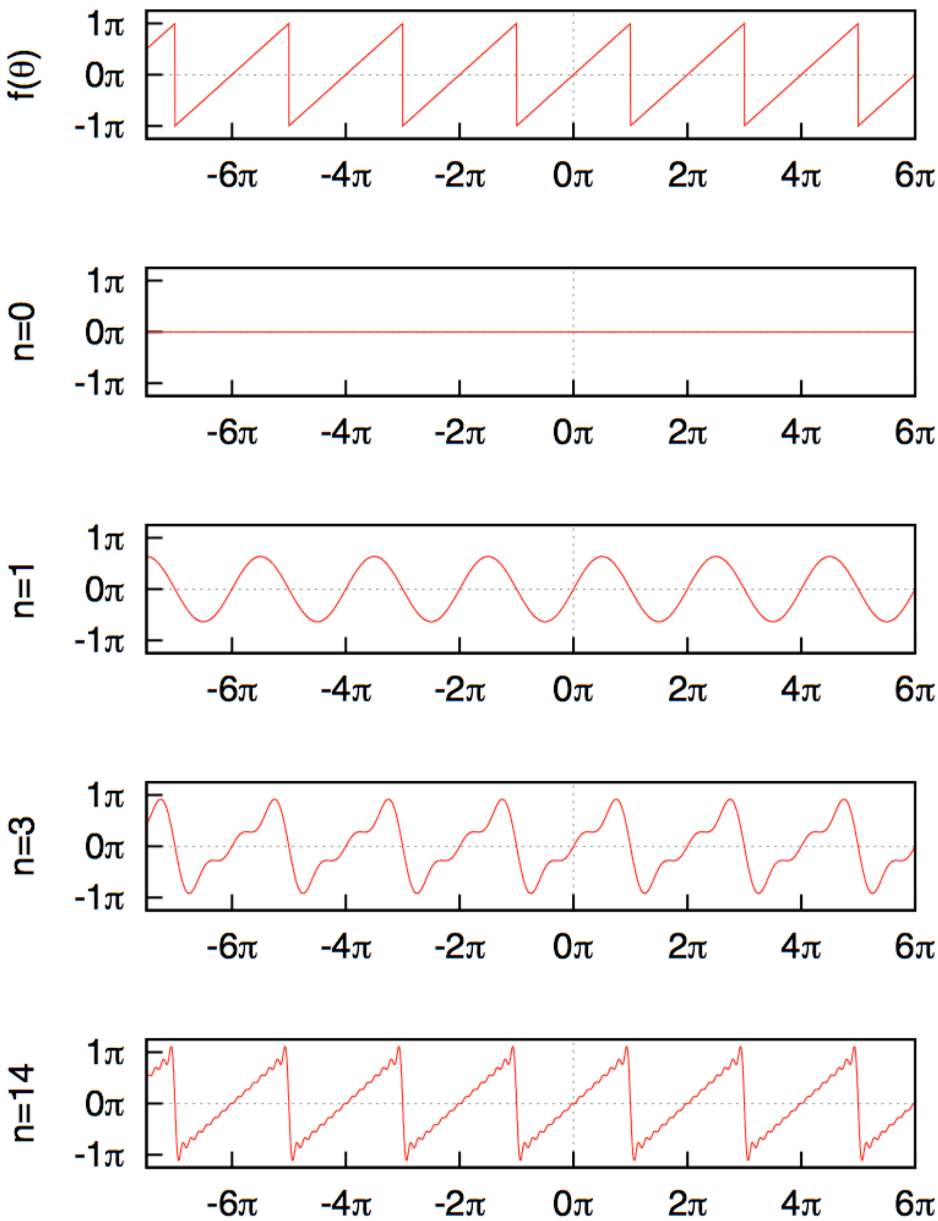

Abbildung 2: Einige Partialsummen $S_n^f(\theta)$ der Fourierreihe zu der in Beispiel 1.5 betrachteten Funktion $g(\theta) = \theta$.

1.6 Lemma (Besselsche Ungleichung)**:**
Sei f 2π-periodisch und messbar und seien c_n die Fourierkoeffizienten von f. Dann gilt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, |f(\theta)|^2\,, \tag{1}$$

wobei die rechte Seite genau dann endlich ist, wenn f lokal quadratintegrierbar ist.

Bemerkung: Wir zeigen später, dass in (1) tatsächlich Gleichheit gilt.

Beweis:

$$\begin{aligned}
&\left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{in\theta} \right|^2 \\
&= \left(f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{in\theta} \right) \left(\overline{f}(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} \overline{c_n} \mathrm{e}^{-in\theta} \right) \\
&= |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} \left(c_n \overline{f}(\theta) \mathrm{e}^{in\theta} + \overline{c_n} f(\theta) \mathrm{e}^{-in\theta} \right) + \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-N}^{N} c_n \overline{c_m}\, \mathrm{e}^{i\theta(n-m)}\,.
\end{aligned}$$

Wir teilen beide Seiten durch 2π und integrieren von $-\pi$ bis π

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \left| f(\theta) - \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{in\theta} \right|^2 \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} (c_n \overline{c_n} + c_n \overline{c_n}) + \sum_{n=-N}^{N} c_n \overline{c_n} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2\,.
\end{aligned}$$

Also ist $\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, |f(\theta)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} |c_n|^2 \geq 0$ für alle $N \in \mathbb{N}$, und somit folgt im Limes $N \to \infty$ die Behauptung. $\square$

Bemerkung: Man rechnet leicht nach, dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \frac{1}{4} |a_0|^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(|a_n|^2 + |b_n|^2 \right)$$

gilt.

1.7 Korollar (Spezialfall des Riemann-Lebesgue-Lemmas)**:**
Die Fourierkoeffizienten einer quadratintegrierbaren Funktion bilden eine Nullfolge, also $\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$

Beweis: Nach Voraussetzung und Lemma 1.6 gilt $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ also konvergent. $\Rightarrow |c_n|^2$ Nullfolge $\Rightarrow c_n$ Nullfolge. □

Um nun das erste Konvergenzresultat für Fourierreihen zu zeigen, benötigen wir noch einige Definitionen. Im Folgenden sei immer $-\infty < a < b < \infty$.

1.8 Definition (Stückweise Stetigkeit)**:**
Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise stetig*, falls

(i) f ist stetig auf $[a,b]$ außer möglicherweise an endlich vielen Stellen $x_1, \dots, x_k$

(ii) an jeder Unstetigkeitsstelle x_j, $j = 1, \dots, k$, existieren die links- bzw. rechtsseitigen Limites

$$f(x_j^-) = \lim_{\varepsilon\to 0,\, \varepsilon>0} f(x_j - \varepsilon) \quad \text{und} \quad f(x_j^+) = \lim_{\varepsilon\to 0,\, \varepsilon>0} f(x_j + \varepsilon)$$

und sind endlich.

Wir schreiben dann $f \in \mathrm{PC}([a,b])$ (*piecewise continuous*).

1.9 Definition (Stückweise Differenzierbarkeit)**:**
Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ heißt *stückweise differenzierbar (glatt)*, falls

(i) $f \in \mathrm{PC}([a,b])$

(ii) f' existiert und ist stetig auf (a,b), außer an möglicherweise endlich vielen Stellen $x_1, \dots, x_k$ und die rechts- bzw. linksseitigen Limites $f'(x_j^-)$, $f'(x_j^+)$, $f'(a^+)$ und $f'(b^-)$ existieren und sind endlich.

Wir schreiben dann $f \in \mathrm{PS}([a,b])$ (*piecewise smooth*).

Kurz gesagt:

- $f \in \mathrm{PC}([a,b])$, falls f bis auf endlich viele „Sprünge“ stetig ist.
- $f \in \mathrm{PS}([a,b])$, falls f außer an endlich vielen „Sprüngen“ und „Knicken“ stetig differenzierbar ist.

Singularitäten oder Spitzen sind nicht erlaubt.

Bemerkung: Wir sagen $f \in \mathrm{PC}(\mathbb{R})$ bzw. $f \in \mathrm{PS}(\mathbb{R})$, falls $f \in \mathrm{PC}([a,b])$ bzw. $f \in \mathrm{PS}([a,b])$ für jedes endliche Intervall $[a,b]$.

Da wir bereits in Beispiel 1.5 gesehen haben, dass die Fourierreihe im Allgemeinen nicht absolut konvergent ist, müssen wir auf die Summationsreihenfolge achten. Deshalb fixieren wir im Folgenden die N-te Partialsumme auf

$$S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta)\right) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,.$$

Unser Ziel ist es zu zeigen, dass $S_N^f(\theta)$ für $N \to \infty$ gegen $f(\theta)$ konvergiert. Wegen

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, f(\phi) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi}$$

ist also

$$\begin{aligned}
S_N^f(\theta) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, f(\phi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\theta-\phi)} \\
&\overset{n\to -n}{=} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, f(\phi)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi-\theta)} \\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, f(\phi)\, \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(\phi-\theta)} \\
&=: \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, f(\phi)\, D_N(\phi-\theta)
\end{aligned}$$

wobei

$$D_N(\phi) := \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}$$

der *Dirichlet Kern* heißt.

Da es sich bei $D_N(\phi)$ um eine geometrische Summe handelt

$$D_N(\phi) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\phi} \left(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\phi} + \cdots + \mathrm{e}^{2N\mathrm{i}\phi}\right) = \frac{1}{2\pi}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\phi} \sum_{n=0}^{2N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} \tag{2}$$

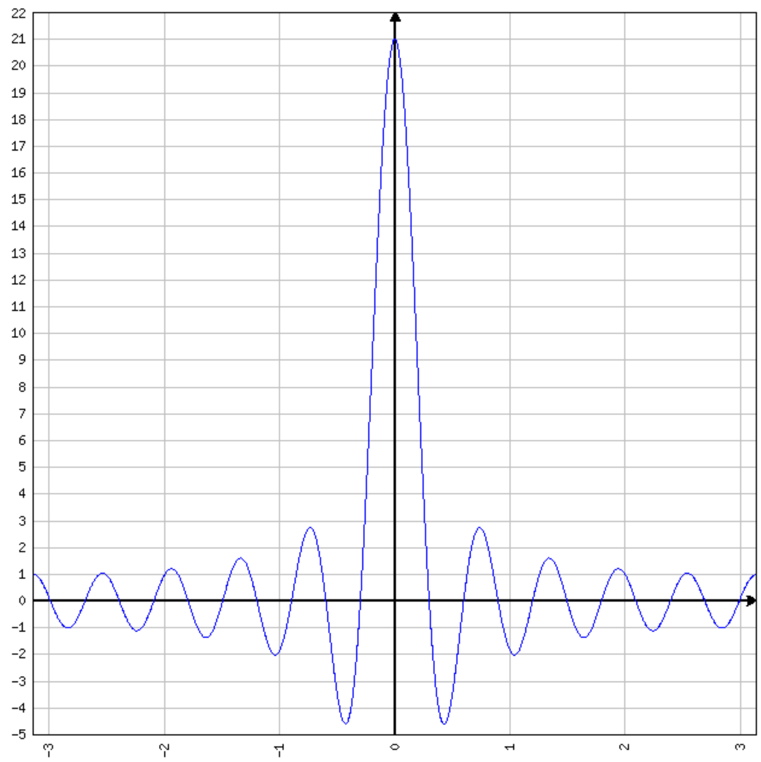

Abbildung 3: Der Dirichlet Kern für $N = 10$. Es ist $D_N(0) = 2N + 1$.

ergibt die Summenformel $\sum_{n=0}^{k} q^n = \frac{q^{k+1}-1}{q-1}$, dass für $\phi \neq 0$

$$\begin{aligned} D_N(\phi) &= \frac{1}{2\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\phi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2N+1)\phi} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - 1} = \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1)\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\phi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - 1} && (3) \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+\frac{1}{2})\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(N+\frac{1}{2})\phi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi/2} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi/2}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin((N+\frac{1}{2})\phi)}{\sin(\phi/2)}\,. && (4) \end{aligned}$$

Die Heuristik ist nun, dass $D_N(\phi) \to \delta(\phi)$ für $N \to \infty$ und somit

$$S_N^f(\theta) = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, f(\phi) D_N(\phi - \theta) \to \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, f(\phi)\delta(\phi - \theta) = f(\theta)\,.$$

1.10 Satz:
Sei f 2π-periodisch und $f \in PS(\mathbb{R})$. Dann gilt für jedes $\theta \in \mathbb{R}$

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = \frac{1}{2}\left(f(\theta^-) + f(\theta^+)\right)\,.$$

Insbesondere gilt für jedes θ an dem f stetig ist

$$\lim_{N\to\infty} S_N^f(\theta) = f(\theta)\,.$$

Bemerkung: An den Sprungstellen konvergiert $S_N^f(\theta)$ also gegen den Mittelwert des links- und rechtsseitigen Limes.

Beweis: Wegen

$$\begin{aligned} D_N(\phi) &= \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi} = \frac{1}{2\pi}\left(1+\sum_{n=1}^{N}(\underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\phi}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\phi}}_{=2\cos(n\phi)})\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\cos(n\phi) \end{aligned} \tag{5}$$

gilt für jedes $N \in \mathbb{N}$

$$\int_{-\pi}^{0} \mathrm{d}\phi\, D_N(\phi) = \int_{0}^{\pi} \mathrm{d}\phi\, D_N(\phi) = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{N}\underbrace{\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\phi\,\cos(n\phi)}_{=0\ \forall n} = \frac{1}{2}\,,$$

also

$$\frac{1}{2}f(\theta^-) = f(\theta^-)\int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\phi\, D_N(\phi) \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}f(\theta^+) = f(\theta^+)\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\phi\, D_N(\phi)\,.$$

Betrachte nun

$$\begin{aligned} &S_N^f(\theta) - \frac{1}{2}\big(f(\theta^-)+f(\theta^+)\big) = \\ &\quad = \int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{d}\phi\, f(\theta+\phi)D_N(\phi) - \int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\phi\, f(\theta^-)D_N(\phi) - \int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\phi f(\theta^+)D_N(\phi) \\ &\quad = \int_{-\pi}^{0}\mathrm{d}\phi\, \big(f(\theta+\phi)-f(\theta^-)\big)\,D_N(\phi) + \int_{0}^{\pi}\mathrm{d}\phi\, \big(f(\theta+\phi)-f(\theta^+)\big)\,D_N(\phi) \end{aligned} \tag{$*$}$$

Wir müssen nun zeigen, dass $(*)$ für jedes feste θ und $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert. Dazu betrachten wir die beiden Summanden getrennt:

$$\int\limits_0^\pi \mathrm{d}\phi\, \big(f(\theta+\phi) - f(\theta^+)\big)\, D_N(\phi) =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^\pi \mathrm{d}\phi\, \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta^+)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - 1} \left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1)\phi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}N\phi}\right)$$

$$=: C_{-N-1}(g) - C_N(g)$$

wobei

$$g(\phi) = \begin{cases} \frac{f(\theta+\phi)-f(\theta^+)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}-1} & \text{falls } \phi \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und $C_n(g)$ der n-te Fourierkoeffizient von g ist.

Außer bei $\phi = 0$ ist $g(\phi)$ so glatt wie f und wegen

$$\lim_{\phi \searrow 0} g(\phi) = \lim_{\phi \searrow 0} \frac{f(\theta+\phi) - f(\theta^+)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} - 1} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{\phi \searrow 0} \frac{f'(\theta+\phi)}{\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi}} = \frac{f'(\theta^+)}{\mathrm{i}}$$

folgt, dass $g \in \mathrm{PC}([0,\, \infty])$ und somit insbesondere integrierbar. Nach Korollar 1.7 (Riemann-Lebesgue-Lemma) folgt nun $C_N(g) \to 0$ für $N \to \infty$.

Analog verfährt man mit dem anderen Summanden in $(*)$. □

1.11 Beispiel:
Nach Satz 1.10 konvergiert also im Beispiel 1.4 die Fourierreihe für jedes θ gegen $f(\theta) = |\theta|$ und es gilt für $\theta \in [-\pi,\, \pi]$

$$|\theta| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)\theta)}{(2n-1)^2}$$

Für $\theta = 0$ ergibt sich

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2},$$

also

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \dots$$

Im Beispiel 1.5 konvergiert die Fourierreihe außer bei $\theta = (2n-1)\pi$ gegen $f(\theta) = \theta$ und für $\theta = (2n-1)\pi$ gegen 0. Für $\theta \in (-\pi, \pi)$ gilt also

$$\theta = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(n\theta)$$

Für $\theta = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich

$$\frac{\pi}{2} = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin(\frac{n\pi}{2}) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{2k-1},$$

also

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots$$

1.12 Korollar:
Seien f und g jeweils 2π-periodisch und $f, g \in PS(\mathbb{R})$. Falls f und g dieselben Fourierkoeffizienten haben, so gilt

$$f(\theta) = g(\theta)$$

für alle θ an denen f und g stetig sind.

Beweis: f und g haben dieselbe Fourierreihe. Nach Satz 1.10 folgt Behauptung.
□

Bemerkung: Die punktweise Konvergenz in Satz 1.10 reicht nicht aus, wenn man Fourierreihen termweise differenzieren oder integrieren möchte. Im Allgemeinen bräuchte man dafür gleichmäßige Konvergenz der termweise differenzierten Reihe. Für Fourierreihen genügen aber etwas schwächere Forderungen.

Für stetige, stückweise differenzierbare Funktionen gilt immer noch der *Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.* Sei zum Beispiel $f \in \mathrm{PS}([a, b]) \cap \mathrm{C}([a, b])$ nur bei $c \in (a, b)$ nicht diffbar, dann ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \mathrm{d}x\, f'(x) &= \int_a^c \mathrm{d}x\, f'(x) + \int_c^b \mathrm{d}x\, f'(x) \\ &= f(c^-) - f(a) + f(b) - f(c^+) \\ &\overset{f \text{ stetig}}{=} f(b) - f(a)\,. \end{aligned}$$

1.13 Satz:
Sei f 2π-periodisch, stetig und stückweise differenzierbar. Seien a_n, b_n und c_n die Fourierkoeffizienten von f und a'_n, b'_n und c'_n die Fourierkoeffizienten von f'.

Dann gilt $a'_n = nb_n$, $b'_n = -na_n$ und $c'_n = \mathrm{i}nc_n$

Beweis: Mit partieller Integration:

$$c'_n = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, f'(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} = \underbrace{\frac{1}{2\pi}f(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\Big|_{-\pi}^{\pi}}_{=0} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, f(\theta)(-\mathrm{i}n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta})$$
$$= \mathrm{i}n\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, f(\theta)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} = \mathrm{i}nc_n\,.$$

Rest analog. □

1.14 Satz:
Sei f 2π-periodisch, stetig und stückweise differenzierbar und sei auch f' stückweise differenzierbar.

Dann gilt

$$f'(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{i}nc_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos(n\theta) - na_n\sin(n\theta))$$

für alle θ an denen f' stetig ist, wobei a_n, b_n, c_n die Fourierkoeffizienten von f sind.

Beweis: Kombiniere Satz 1.10 und Satz 1.13. □

1.15 Satz:
Sei f 2π-periodisch und stückweise stetig mit Fourierkoeffizienten a_n, b_n und c_n und sei

$$F(\theta) = \int\limits_0^{\theta} \mathrm{d}\phi\, f(\phi)\,.$$

Falls $c_0 = \frac{1}{2}a_0 = 0$, dann gilt $\forall\theta \in \mathbb{R}$

$$F(\theta) = C_0 + \sum_{n\neq 0}\frac{c_n}{\mathrm{i}n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\sin(n\theta) - \frac{b_n}{n}\cos(n\theta) \qquad (*)$$

wobei $C_0 = \frac{1}{2}A_0$ der Mittelwert von F auf $[-\pi, \pi]$ ist.

Falls $c_0 \neq 0$, dann konvergiert die Reihe auf der rechten Seite von $(*)$ gegen $F(\theta) - c_0\theta$.

Beweis: Übung ;) $\square$

1.16 Satz:
Falls f 2π-periodisch, stetig und stückweise differenzierbar ist, dann konvergiert die Fourierreihe von f absolut und gleichmäßig gegen f.

Beweis: Wir wissen bereits, dass die Reihe punktweise gegen f konvergiert. Es bleibt zu zeigen, dass $S_N^f(\theta) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ absolut und gleichmäßig konvergiert, also dass

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty \tag{$*$}$$

und

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\theta\in[-\pi,\,\pi]} \left| \sum_{n=N}^{\infty} (c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} + c_{-n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}) \right| = 0\,. \tag{$**$}$$

Es folgt hier $(**)$ aus $(*)$.

Seien c'_n die Fourierkoeffizienten von f'. Gemäß Satz 1.13 ist $c_n = \frac{c'_n}{in}$ falls $n \neq 0$ und die Besselsche Ungleichung (Lemma 1.6) liefert

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c'_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta\, |f'(\theta)|^2 < \infty\,.$$

Die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung liefert dann

$$\sum_{n=-N}^{N} |c_n| = |c_0| + \underbrace{\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N} \left|\frac{c'_n}{n}\right|}_{|\langle\vec{c},\vec{n}\rangle|} \leq |c_0| + \left(\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N} |c'_n|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\substack{n=-N\\ n\neq 0}}^{N} \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

mit $\vec{c} = (c'_{-N}, c'_{-N+1}, \ldots, c'_N) \in \mathbb{C}^{2N}$ und $\vec{n} = (\frac{1}{-N}, \ldots, \frac{1}{N}) \in \mathbb{C}^{2N}$. $\square$

Wegen $c_n' = \mathrm{i}nc_n$ konvergiert die Fourierreihe der Ableitung langsamer als die der Funktion selbst. Andererseits muss für Funktionen mit glatten Ableitungen die Fourierreihe sehr schnell konvergieren.

Es besteht ein direkter Zusammenhang zwischen dem Abfall der Fourierkoeffizienten und der Differentierbarkeit einer Funktion.

1.17 Satz:
Sei f 2π-periodisch und $k \in \mathbb{N}$.

(a) Falls $f \in C^{(k-1)}(\mathbb{R})$ und $f^{(k-1)} \in PS(\mathbb{R})$, dann erfüllen die Fourierkoeffizienten von f

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|n^k a_n\right|^2 < \infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left|n^k b_n\right|^2 < \infty, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|n^k c_n\right|^2 < \infty\,.$$

Insbesonders gilt für $n \to \infty$, dass $n^k a_n \to 0$, $n^k b_n \to 0$ und $n^k c_n \to 0$.

(b) Seien c_n die Fourierkoeffizienten von f. Falls $C < \infty$ und $\alpha > 1$ existieren, so dass für $n \neq 0$ gilt $|c_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}$, dann ist $f \in C^{(k)}(\mathbb{R})$.

(bzw. für $|a_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}$ und $|b_n| \leq C|n|^{-(k+\alpha)}$)

Beweis: (a) Wende Satz 1.13 k-mal an, um zu sehen, dass die Fourierkoeffizienten von $f^{(k)}$ durch $c_n^{(k)} = (\mathrm{i}n)^k c_n$ gegeben sind. Dann folgt Behauptung aus der Besselschen Ungleichung (Lemma 1.6).

(b) Da $\alpha > 1$, gilt für $j \leq k$

$$\sum_{n\neq 0} |n^j c_n| \leq C \sum_{n\neq 0} |n|^{-(k-j+\alpha)} \leq 2C \sum_{n\neq 0} n^{-\alpha} < \infty$$

Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} (\mathrm{i}n)^j c_n \mathrm{e}^{in\theta}$ für jedes $j \leq k$ absolut und gleichmäßig und definiert somit eine stetige Funktion, welche die j-te Ableitung von $f(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$ ist.

□

Bisher haben wir nur 2π-periodische Funktionen betrachtet. An dieser Stelle wollen wir uns kurz zwei offensichtliche Erweiterungen überlegen: Wie kann man Funktionen auf einem Intervall periodisch fortsetzten und wie sieht dann die zugehörige Fourierreihe aus? Und wie sieht die Fourierentwicklung $2l$-periodischer Funktionen aus?

Zur ersten Frage nehmen wir an, dass eine Funktion f auf dem Intervall $[0, \pi]$ gegeben ist. (Andere Intervalle kann man durch Verschieben und Skalieren auf $[0, \pi]$ abbilden.) Es gibt nun zwei kanonische Möglichkeiten so ein f zu einer 2π-periodischen Funktion auf $\mathbb{R}$ fortzusetzten, die gerade oder die ungerade Fortsetzung:

$$f_{\text{gerade}}(\theta) := \begin{cases} f(\theta) & \text{falls } \theta \in [0, \pi] \\ f(-\theta) & \text{falls } \theta \in [-\pi, 0) \end{cases}$$

und

$$f_{\text{ungerade}}(\theta) := \begin{cases} f(\theta) & \text{falls } \theta \in (0, \pi] \\ -f(-\theta) & \text{falls } \theta \in (-\pi, 0) \\ 0 & \text{falls } \theta = 0\,. \end{cases}$$

Die Fourierreihe von f_{gerade} enthält gemäß Lemma 1.3 nur Cosinus-Terme und wird als Cosinusreihe von f bezeichnet. Die Fourierreihe von f_{ungerade} enthält Sinus-Terme und wird als Sinusreihe von f bezeichnet. Die Wahl der Darstellung in einem konkreten Problem kann von mehreren Faktoren abhängen, z.B. welche der beiden Fortsetzungen bessere Regularitätseigenschaften hat, oder welche Randbedingungen die Entwicklungsfunktionen erfüllen sollten. Man beachte hierzu, dass $\sin(n0) = \sin(n\pi) = 0$ und $\cos'(n0) = \cos'(n\pi) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Nun betrachten wir noch den Fall, dass f $2l$-periodisch ist. Durch einfache Substitution

$$x = \frac{l\theta}{\pi}, \quad g(\theta) = f(x) = f\left(\frac{l\theta}{\pi}\right),$$

erhalten wir eine 2π-periodische Funktion g. Falls g stückweise differenzierbar ist, konvergiert die Fourierreihe

$$g(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}, \qquad c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta \, g(\theta) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}.$$

Substituieren wir wiederum $\theta = \frac{\pi x}{l}$, erhalten wir die $2l$-periodische Fourierreihe von f,

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}}, \qquad c_n = \frac{1}{2l} \int_{-l}^{l} \mathrm{d}x \, f(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}},$$

bzw.

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

mit

$$a_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} \mathrm{d}x\, f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad b_n = \frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l} \mathrm{d}x\, f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,.$$

Schließlich ergibt sich für die Sinus- bzw. Cosinusreihe einer stückweise differenzierbaren Funktion f auf dem Intervall $[0,l]$

$$f(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad a_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} \mathrm{d}x\, f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}$$

und

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\,, \qquad b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} \mathrm{d}x\, f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,.$$

1.18 Beispiel (Anwendung auf die Wärmeleitungsgleichung)**:**
Wir hatten für das Anfangswertproblem für $u\colon\ [0,\, l] \times [0,\, \infty) \to \mathbb{R}$

$$\text{(AWP)} \qquad \begin{cases} \partial_t u = \kappa\, \partial_x^2\, u; \quad u(0,t) = u(l,t) = 0 \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

die zunächst formale Lösung

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{l^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$$

gefunden. Es ist also

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi x}{l} \overset{!}{=} u_0(x)$$

die Sinusreihe der Anfangsdaten $u_0 : [0,l] \to \mathbb{R}$ und die Koeffizienten sind gemäß

$$b_n = \frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l} \mathrm{d}x\, u_0(x)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

zu wählen. Hier ist die Wahl der Sinusreihe naheliegend, da die ungerade Fortsetzung von u_0 zumindest bei 0 und $\pi\mathbb{Z}$ stetig ist.

Ist das so definierte $u(x,t)$ eine Lösung des AWP?

Für $u_0 \in \mathrm{PS}([0,\, l])$ wissen wir, dass tatsächlich $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} = u_0(x)$ punktweise gilt und die Funktion $u(x,t)$ erfüllt auch sicher die Randbedingungen, da jeder Term in der Summe die Randbedingungen erfüllt.

Ist $u(x,t)$ eine differenzierbare Funktion?

Ja, zumindest für $t > 0$, denn dann konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig auf $[0,\, l] \times [\epsilon,\, \infty)$ für jedes $\epsilon > 0$, da

$$\left| b_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{l^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right| \leq C \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\kappa\epsilon}{l^2}}$$

Für die Reihe mit partiell abgeleiteten Termen findet man analog für $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0$

$$\left| \partial_t^\alpha \partial_x^\beta b_n \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{l^2}} \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \right| \leq C \left(\frac{n^2\pi^2\kappa t}{l^2}\right)^\alpha \left(\frac{n\pi x}{l}\right)^\beta \mathrm{e}^{-\frac{n^2\pi^2\kappa t}{l^2}}$$

gleichmäßige Konvergenz.

Also ist $u \in \mathrm{C}^\infty([0,\, l] \times (0,\, \infty))$ und u ist eine Lösung des AWP für $t > 0$, da sich Ableitungen und Summation vertauschen lassen. Diese Lösung ist auch eindeutig, wie wir später sehen werden.

Wir beobachten hier eine zunächst erstaunliche Eigenschaft der Wärmeleitungsgleichung: selbst wenn die Anfangsdaten u_0 unstetig sind, so ist die Lösung nach jeder endlichen Zeit schon glatt, also ∞-oft differenzierbar.

Bemerkung (Vergleich mit Taylorreihe)*:* Damit die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

konvergiert, muss f analytisch (also insbesondere $f \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R})$) sein, die Koeffizienten aber sind lokal.

Damit die Fourierreihe

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}, \quad c_n = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta f(\theta) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}$$

konvergiert, muss nur $f \in \mathrm{PS}(\mathbb{R})$ gelten, dafür sind die Koeffizienten aber global.

Bemerkung (Konvergenz der Fourierreihe)*:* Der Satz 1.10 zur punktweisen Konvergenz gilt analog, wenn man $f \in \mathrm{PS}([-\pi, \pi])$ durch $f \in \mathrm{BV}([-\pi, \pi])$ ersetzt.

$f \in \mathrm{BV}([a, b])$ bedeutet, dass f von *beschränkter Variation* ist, das heißt, es existiert ein $M < \infty$ so, dass

$$|f(x_1) - f(a)| + |f(x_2) - f(x_1)| + \cdots + |f(b) - f(x_n)| < M$$

für alle $a < x_1 < \cdots < x_n < b$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung: Zumindest für C^1-Funktionen ist die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen offensichtlich:

Sei $f \in C^1(\mathbb{R}^d)$ periodisch bezüglich des Gitters $2\pi\mathbb{Z}^d$, d.h. es gilt

$$f(\theta + \gamma) = f(\theta) \qquad \text{für alle } \gamma \in 2\pi\mathbb{Z}^d \text{ und } \theta \in \mathbb{R}^d\,,$$

dann ist f durch die gleichmäßig und absolut konvergente Fourierreihe

$$f(\theta) = \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \cdots \sum_{n_d=-\infty}^{\infty} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}^d} c_n \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\cdot\theta}$$

gegeben, wobei

$$c_n = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta_1 \cdots \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}\theta_d \, f(\theta) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\cdot\theta} = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{[-\pi,\pi]^d} \mathrm{d}\theta \, f(\theta) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\cdot\theta}\,.$$

Das folgt sofort aus sukzessiver Anwendung von Satz 1.16, da für absolut konvergente Summen und Integrale die Summations- bzw. Integrationsreihenfolge unerheblich ist.