# 2 Hilberträume

**2.1 Definition:**
Ein *Skalarprodukt* (oder *inneres Produkt*) in einem komplexen Vektorraum $\mathcal{H}$ (welcher dann ein *Prä-Hilbertraum* heißt) ist eine Abbildung

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

für die $\forall \phi, \psi, \chi \in \mathcal{H}$ und $a \in \mathbb{C}$ folgendes gilt:

(i) $\langle \phi, \phi \rangle \geq 0$ und $\langle \phi, \phi \rangle = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$ (positiv definit)

(ii) $\langle \phi, \chi + \psi \rangle = \langle \phi, \chi \rangle + \langle \phi, \psi \rangle$

(iii) $\langle \phi, \alpha\psi \rangle = \alpha \langle \phi, \psi \rangle$

(iv) $\langle \phi, \psi \rangle = \langle \psi, \phi \rangle^*$

*Bemerkung:* Aus der Definition folgt sofort, dass $\forall \phi, \psi, \chi \in \mathcal{H}$ und $a \in \mathbb{C}$ gilt

$$\langle \phi + \chi, \psi \rangle = \langle \phi, \psi \rangle + \langle \chi, \psi \rangle$$
$$\langle \alpha\phi, \psi \rangle = \alpha^* \langle \phi, \psi \rangle$$

Wegen der Linearität im zweiten und der Antilinearität im ersten Argument, nennt man solche Abbildungen *Sequilinearformen* („$1\frac{1}{2}$-fach linear“).

Das Skalarprodukt ist also eine positiv definite symmetrische Sequilinearform.

**2.2 Beispiel:**
Auf $\mathbb{C}^d$ hat man das übliche Skalarprodukt für $z, w \in \mathbb{C}^d$ ist

$$\langle z, w \rangle = \sum_{j=1}^{d} z_j^* w_j, \qquad z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_d \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_d \end{pmatrix}$$

**2.3 Beispiel:**
Auch die stetigen Funktionen auf einem endlichen Intervall, also $C([a, b])$ bilden einen Prä-hilbertraum mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f^*(x) g(x) \, \mathrm{d}x$$

**2.4 Definition:**
Zwei Vektoren $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ heißen *orthogonal*, falls $\langle \phi, \psi \rangle = 0$ gilt.

**2.5 Definition** (Orthonormalfolge)**:**
Eine Folge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ heißt *Orthonormalfolge*, falls

$$\langle \phi_j, \phi_k \rangle = \delta_{j,k}$$

Für jedes $\psi \in \mathcal{H}$ und beliebiges $n \in \mathbb{N}$ gilt bezüglich einer belibigen Orthonormalfolge $(\phi_j)$, dass

$$\psi = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \psi \rangle \phi_j}_{=:\psi_n} + \underbrace{\psi - \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \psi \rangle \phi_j}_{=:\psi_n^\perp}$$

Es gilt $\langle \psi_n, \psi_n^\perp \rangle = 0$, da

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \psi \rangle \phi_j, \psi - \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \psi \rangle \phi_j \right\rangle =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \psi \rangle^* \left( \langle \phi_j, \psi \rangle - \left\langle \phi_j, \sum_{k=1}^{n} \langle \phi_k, \psi \rangle \phi_k \right\rangle \right) = \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \psi \rangle^* \left( \langle \phi_j, \psi \rangle - \langle \phi_j, \psi \rangle \right) = 0$$

**2.6 Korollar:**
*Sei* $\|\psi\| = \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$ *und* $(\phi_j)$ *eine Orthonormalfolge.*

*Dann gilt für alle* $\psi \in \mathcal{H}$ *und* $n \in \mathbb{N}$*, dass*

$$\|\psi\|^2 \geq \sum_{j=1}^{n} |\langle \phi_j, \psi \rangle|^2 \qquad \text{(Besselsche Ungleichung)}$$

*und für alle* $\phi, \psi \in \mathcal{H}$*, dass*

$$|\langle \phi, \psi \rangle| \leq \|\phi\| \, \|\psi\| \qquad \text{(Schwarzsche Ungleichung)}$$

*Beweis:* Wegen $\langle \psi_n, \psi_n^\perp \rangle = 0$ hat man den *allgemeinen Satz von Pythagoras*:

$$\begin{aligned} \|\psi\|^2 &= \langle \psi_n + \psi_n^\perp, \psi_n + \psi_n^\perp \rangle \\ &= \|\psi_n\| + \|\psi_n^\perp\| \\ &= \sum_{j=1}^{n} |\langle \phi_j, \psi \rangle|^2 + \|\psi_n^\perp\| \end{aligned}$$

welcher die Besselsche Ungleichung impliziert.

Für $n = 1$, $\phi_1 = \frac{\phi}{\|\phi\|}$ und $\phi \neq 0$ ergibt sich als Spezialfall

$$\|\psi\|^2 \geq | \left\langle \frac{\phi}{\|\phi\|}, \psi \right\rangle |^2 = \frac{1}{\|\phi\|^2} | \langle \phi, \psi \rangle |^2$$

sonst gilt die Schwarzsche Ungleichung offensichtlich ebenfalls. □

**2.7 Korollar:**
*Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt auf einem komplexen Vektorraum $\mathcal{H}$.*

*Dann ist*

$$\|\psi\| := \sqrt{\langle \psi, \psi \rangle}$$

*eine Norm auf $\mathcal{H}$ und das Skalarprodukt ist stetig bezüglich dieser Norm, das heißt*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$$

*ist stetig.*

*Beweis:* Positivität und Definitheit sind klar, Homogenität (das heißt $\|\alpha\psi\| = |\alpha| \, \|\psi\|$) ebenfalls.

Die Dreiecksungleichung bekommt man aus der Schwarzschen Ungleichung und der Ungleichung $\Re(z) \leq |z|$ für $z \in \mathbb{C}$:

$$\|\phi + \psi\|^2 = \langle \phi + \psi, \phi + \psi \rangle = \|\phi\|^2 + \|\psi\|^2 + 2\Re \langle \phi, \psi \rangle \leq (\|\phi\| + \|\psi\|)^2$$

Auch die Stetigkeit folgt aus der Schwarzschen Ungleichung. Seien $\phi_n \to \phi$ und $\psi_n \to \psi$ konvergente Folgen in $\mathcal{H}$, dann ist (da in metrischen Räumen Folgenstetigkeit gleich Stetigkeit ist):

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} | \langle \phi_n, \psi_n \rangle - \langle \phi, \psi \rangle | &\leq \lim_{n\to\infty} (| \langle \phi_n - \phi, \psi_n \rangle | + | \langle \phi, \psi_n - \psi \rangle |) \\ &\leq \lim_{n\to\infty} (\underbrace{\|\phi_n - \phi\|}_{\to 0} \underbrace{\|\psi_n\|}_{<\infty} + \underbrace{\|\phi\|}_{<\infty} \underbrace{\|\psi_n - \psi\|}_{\to 0}) = 0 \end{aligned}$$

□

**2.8 Definition** (Hilbertraum)**:**
Ein *Hilbertraum* ist ein vollständiger, normierter Vektorraum, dessen Norm $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ durch ein Skalarprodukt gegeben ist.

*Bemerkung:* Man rechnet leicht nach, dass sich das Skalarprodukt auf einem Prä-Hilbertraum mit Hilfe der Polarisationsidentität

$$\langle \phi, \psi \rangle = \frac{1}{4}(\|\phi + \psi\|^2 - \|\phi - \psi\|^2 - i\,\|\phi + i\psi\|^2 + i\,\|\phi - i\psi\|^2)$$

aus der Norm rekonstruieren lässt.

Zur Erinnerung: vollständig heißt, dass jede Cauchyfolge gegen ein Element des Raums konvergiert.

**2.9 Beispiel** (Der Raum $L^2(\mathbb{R}^d)$)**:**
Wir beginnen mit der Definition

$$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) = \left\{ f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \mid f \text{ messbar und } \|f\|_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty \right\}$$

Man würde gerne $\|\cdot\|_2$ als Norm auf $\mathcal{L}^2$ definieren, aber es gibt ein Problem: Falls $f(x) = g(x)$ für (Lebsgue)-fast alle $x \in \mathbb{R}^d$, aber $f \neq g$, dann ist trotzdem $\|f - g\|_2 = 0$. Die Abbildung $\|\cdot\|_2 : \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{R}_+$ ist also keine Norm.

Deshalb definiert man den Raum $L^2(\mathbb{R}^d)$ als den Raum $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$ modulo der Äquivalenzrelation

$$f \sim g \rightleftharpoons \|f - g\|_2 = 0 \quad \text{für } f, g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d)$$

Die Elemente von $L^2(\mathbb{R}^d)$ sind also Äquivalenzklassen von Funktionen, welche fast überall übereinstimmen.

**2.10 Satz:**
*Der Raum $L^2(\mathbb{R}^d)$ mit dem Skalarprodukt*

$$\langle \phi, \psi \rangle_{L^2} = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \phi^*(x)\psi(x)\,\mathrm{d}x$$

*ist ein Hilbertraum.*

*Beweis:* Nur die Vollständigkeit bleibt zu zeigen. Das ist die Aussage des Satzes von Riesz und Fischer. □

**2.11 Definition** (Orthonormalbasis)**:**
Eine Orthonormalfolge $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ heißt *Orthonormalbasis*, falls für alle $\psi \in \mathcal{H}$ gilt:

$$\psi = \sum_{j=1}^{\infty} \langle \phi_j, \psi \rangle \, \phi_j$$

wobei die Reihe in $\mathcal{H}$ konvergiert, das heißt

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \psi \rangle \, \phi_j - \psi \right\|_{\mathcal{H}} = 0$$

*Bemerkung:* Nicht alle Hilberträume besitzen abzählbare Orthonormalbasen, sondern nur die separablen.

**2.12 Definition:**
Ein metrischer Raum heißt *separabel*, falls er eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt

**2.13 Proposition:**
*Eine Orthonormalfolge* $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ *ist genau dann eine Orthonormalbasis, falls aus* $\langle \phi_j, \psi \rangle = 0$ *für alle* $j \in \mathbb{N}$ *folgt, dass* $\psi = 0$ *ist.*

*Beweis:* Die eine Richtung ist offensichtlich.
Sei $\psi \in \mathcal{H}$, dann gilt $\forall n \in \mathbb{N}$ nach Bessel

$$\sum_{j=1}^{n} |\, \langle \phi_j, \psi \rangle \,|^2 \leq \|\psi\|^2 < \infty$$

Also ist

$$\psi_n := \sum_{j=1}^{n} \langle \phi_j, \psi \rangle \, \phi_j$$

eine Cauchyfolge, welche aufgrund der Vollständigkeit von $\mathcal{H}$ gegen ein $\tilde{\psi} \in \mathcal{H}$ konvergiert.

Allerdings gilt $\forall j \in \mathbb{N}$, dass

$$\begin{aligned} \left\langle \phi_j, \tilde{\psi} - \psi \right\rangle &= \lim_{n\to\infty} \langle \phi_j, \psi_n - \psi \rangle \\ &= \lim_{n\to\infty} \left\langle \phi_j, \sum_{k=1}^{n} \langle \phi_k, \psi \rangle \, \phi_k - \psi \right\rangle \\ &= \langle \phi_j, \psi \rangle - \langle \phi_j, \psi \rangle = 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ nach Voraussetzung ist $\tilde{\psi} - \psi = 0$, also $\psi = \tilde{\psi}$ $\square$

**2.14 Definition:**
Der Raum der quadratsummierbaren Folgen wird mit

$$\ell^2 = \left\{ (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} \colon \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|^2 < \infty \right\}$$

bezeichnet und ist mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} {t_n}^* s_n \text{ für } x = (t_n), y = (s_n) \in \ell^2$$

ein seperabler Hilbertraum.

*Bemerkung:* Jeder unendlich dimensionale separable Hilbertraum $\mathcal{H}$ ist isometrisch isomorph zu $\ell^2$, das heißt es gibt einen isometrischen Isomorphismus (= unitäre Abbildung) $U \colon \mathcal{H} \to \ell^2$.

*Beweis:* Sei $(\phi_j)_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{H}$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$, dann ist

$$U \colon \mathcal{H} \to \ell^2,\ \psi \mapsto (U\psi)_j = \langle \phi_j, \psi \rangle_{\mathcal{H}}$$

ein isometrischer Isomorphismus wegen der Parsevalschen Gleichung

$$\|U\psi\|_{\ell^2}^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |\langle \phi_j, \psi \rangle|^2 = \|\psi\|_{\mathcal{H}}^2$$

$\square$

**2.15 Satz:**
*$L^2(\mathbb{R}^d)$ ist separabel.*

*Beweis:* später $\square$

**2.16 Definition:**
Wir bezeichnen mit

$$C_0^\infty(\mathbb{R}^d) := \left\{ f \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \mid f \in C^\infty(\mathbb{R}^d), \mathrm{supp} f \text{ kompakt} \right\}$$

den Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger, wobei hier $\mathrm{supp} f := \overline{\{x \in \mathbb{R}^d \mid f(x) \neq 0\}} \subset \mathbb{R}^d$.

**2.17 Satz:**
*$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ liegt dicht in $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

*Beweis:* Der Beweis besteht aus einem technischen Teil und aus einem simplen Approximationsargument, welches wir kurz für $d = 1$ skizzieren wollen. Der technische Teil liefert uns, das endliche Linearkombinationen von charakteristischen Funktionen auf Intervallen dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegen. Also müssen wir nur noch Funktionen wie $\chi_{[0,1]}(x)$ in der $L^2$-Norm durch Funktionen in $C_0^\infty(\mathbb{R})$ approximieren. Dass das kein Problem ist, macht man sich an einem Bild klar. □

Eine der wichtigsten Eigenschaften von Hilberträumen ist das *orthogonale Projezieren* auf abgeschlossene Teilräume.

**2.18 Definition:**
Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ eine Teilmenge, dann definiert man das *orthogonale Komplement von $\mathcal{M}$ in $\mathcal{H}$* durch

$$\mathcal{M}^\perp = \{\psi \in \mathcal{H} \mid \langle \phi, \psi \rangle = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{M}\}$$

*Bemerkung:* Es folgt sofort aus der Stetigkeit des Skalarprodukts, dass $\mathcal{M}^\perp$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathcal{H}$ ist.

**2.19 Satz:**
*Sei $\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum eines Hilbertraums $\mathcal{H}$. Dann gilt*

$$\mathcal{H} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}^\perp$$

*das heißt, jeder Vektor $\psi \in \mathcal{H}$ läßt sich in eindeutiger Weise schreiben als $\psi = \phi + \phi^\perp$ mit $\phi \in \mathcal{M}$ und $\phi^\perp \in \mathcal{M}^\perp$.*

*Beweis:* Wir nehmen der einfachheitshalber an, dass $\mathcal{H}$ seperabel ist (tatsächlich sind in der Anwendung fast alle Hilberträume seperabel).

Dann sind auch $\mathcal{M}$ und $\mathcal{M}^\perp$ seperable Hilberträume und es gibt Orthonormalbasen $(\phi_n) \subset \mathcal{M}$ und $(\phi_n^\perp) \subset \mathcal{M}^\perp$. Wir zeigen, dass $(\phi_n) \cup (\phi^\perp)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{H}$ ist und verwenden dann das Kriterium aus Proposition 2.13

Angenommen $\psi \in \mathcal{H}$ erfüllt $\langle \phi_n, \psi \rangle = 0 = \left\langle \phi_m^\perp, \psi \right\rangle$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$. Dann gilt aufgrund der ersten Gleichung, dass $\langle \phi, \psi \rangle = 0$ für alle $\phi \in \mathcal{M}$, also gilt $\psi \in$

$\mathcal{M}^\perp$. Da $(\phi_m^\perp)$ eine Orthonormalbasis von $\mathcal{M}^\perp$ ist, zeigt die zweite Gleichung, dass $\psi = 0$. Also ist $\psi = \phi + \phi^\perp$ mit

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \langle \phi_n, \psi \rangle \, \phi_n \text{ und } \phi^\perp = \sum_{m=1}^{\infty} \left\langle \phi_m^\perp, \psi \right\rangle \phi_m^\perp$$

Angenommen es gibt eine weitere Zerlegung $\psi = \tilde{\phi} + \tilde{\phi}^\perp$ mit $\tilde{\phi} \in \mathcal{M}$ und $\tilde{\phi}^\perp \in \mathcal{M}^\perp$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\phi + \phi^\perp &= \tilde{\phi} + \tilde{\phi}^\perp \\
&\Rightarrow \underbrace{(\phi + \tilde{\phi})}_{\in \mathcal{M}} + \underbrace{(\phi^\perp + \tilde{\phi}^\perp)}_{\in \mathcal{M}^\perp} = 0 \\
&\Rightarrow \left\langle \phi - \tilde{\phi}, \phi - \tilde{\phi} \right\rangle + \left\langle \phi - \tilde{\phi}, \phi^\perp - \tilde{\phi}^\perp \right\rangle = \left\| \phi - \tilde{\phi} \right\|_{\mathcal{H}} \\
&\Rightarrow \phi - \tilde{\phi} = 0 \Rightarrow \phi = \tilde{\phi} \Rightarrow \phi^\perp = \tilde{\phi}^\perp
\end{aligned}$$

Also ist die Zerlegung eindeutig. □

**2.20 Satz:**
*Die Funktionen*

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{inx} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

*bilden eine Orthonormalbasis von* $L^2([-\pi,\, \pi])$.

*Beweis:* Die $\psi_n$s sind offensichtlich eine Orthonormalfolge

$$\langle \psi_n, \psi_m \rangle_{L^2} = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \, {\psi_n}^*(x) \psi_m(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(m-n)x} = \delta_{m,\,n}$$

Gemäß Definition 2.8 ist die Aussage äquivalent dazu, dass für jedes $\varphi \in L^2([-\pi,\, \pi])$ die Fourierreihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle \psi_n, \varphi \rangle \, \psi_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{\langle \psi_n, \varphi \rangle}{\sqrt{2\pi}}}_{= c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{d}x \varphi(x) \mathrm{e}^{-inx}} \mathrm{e}^{inx}$$

gegen $\varphi$ konvergiert und zwar in der $L^2$-Norm.

Aufgrund der Dichtheit (Satz 2.17) gibt es eine Funktion $\tilde{\varphi} \in C_0^\infty([-\pi,\, \pi])$ mit

$$\|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{3}$$

Gemäß Satz 1.16 konvergiert die Fourierreihe von $\tilde{\varphi}$ gleichmäßig und absolut gegen $\tilde{\varphi}$ und somit auch in der $L^2$-Norm. Also gilt für hinreichend große $N \in \mathbb{N}$

$$\left\| \tilde{\varphi} - \sum_{n=-N}^{N} \langle \psi_n, \tilde{\varphi} \rangle \, \psi_n \right\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{3}\,.$$

Weiterhin gilt mit Pythagoras und Bessel:

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{n=-N}^{N} \langle \psi_n, \tilde{\varphi} \rangle \, \psi_n - \sum_{n=-N}^{N} \langle \psi_n, \varphi \rangle \, \psi_n \right\|_{L^2}^2 &= \left\| \sum_{n=-N}^{N} \langle \psi_n, \tilde{\varphi} - \varphi \rangle \, \psi_n \right\|_{L^2}^2 \\
&= \sum_{n=-N}^{N} |\, \langle \psi_n, \tilde{\varphi} - \varphi \rangle \,|^2 \\
&\overset{\text{Bessel}}{\leq} \|\varphi - \tilde{\varphi}\|_{L^2}^2 \leq \left(\frac{\epsilon}{3}\right)^2
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\left\| \varphi - \sum_{n=-N}^{N} \langle \psi_n, \varphi \rangle \, \psi_n \right\|_{L^2} \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ für beliebiges $\epsilon$ und $N$ hinreichend groß. $\square$

**Fazit:** Die Fourierzerlegung einer Funktion $\phi \in L^2([-\pi,\, \pi])$ ist einfach die „Koordinatendarstellung" des Vektors $\phi$ bezüglich der Orthonormalbasis $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{inx}$. Die Abbildung

$$\mathcal{F}_{[-\pi,\, \pi]} \colon L^2([-\pi,\, \pi]) \to \ell^2(\mathbb{Z}),\ \phi \mapsto (\mathcal{F}_{[-\pi,\, \pi]}\phi)_n = \langle \psi_n, \phi \rangle_{L^2}$$

ist unitär und die Inverse ist

$$\mathcal{F}^{-1}_{[-\pi,\, \pi]} \colon \ell^2(\mathbb{Z}) \to L^2([-\pi,\, \pi]),\ c_n \mapsto \phi(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \psi_n(x)\,.$$

Wir können auch hier schon von Fouriertransformation sprechen.

Zusammengefasst haben wir drei Konvergenzresultate bewiesen:

(a) $\phi \in L^2([-\pi,\, \pi]) \Rightarrow$ die Fourierreihe konvergiert in der $L^2$-Norm gegen $\phi$.

(b) $\phi \in PS([-\pi,\, \pi]) \Rightarrow$ die Fourierreihe konvergiert zusätzlich punktweise gegen $\phi$.

(c) $\phi \in PS([-\pi,\, \pi]) \cap C([-\pi,\, \pi]) \Rightarrow$ die Fourierreihe konvergiert gleichmäßig und absolut gegen $\phi$.