4 Distributionen

4.1 Definition:
Sei M ein topologischer Vektorraum. Der Vektorraum der linearen, stetigen Abbildungen (=Funktionale) von M nach $\mathbb{C}$ heißt der *Dualraum* von M und wird mit M' bezeichnet.

4.2 Definition:
Die Elemente des Dualraums $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ von $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ heißen *temperierte Distributionen.*

Bemerkung: Die Elemente des Dualraums $\mathcal{D}$ von $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ heißen *Distributionen.*
Bemerkung: Diese Definition ist zunächst abstrakt, aber wir werden sehen, dass sich die Elemente von $\mathcal{S}'$ als „verallgemeinerte Funktionen" auffassen lassen.

4.3 Beispiel:
Sei f messbar und polynomial L^1-beschränkt, d.h. $(1+|x|)^{-n}f(x) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann wird durch

$$T_f \colon \mathcal{S} \to \mathbb{C},\ g \mapsto T_f(g) = \int f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

eine lineare, stetige Abbildung von $\mathcal{S}$ nach $\mathbb{C}$ definiert und somit $T_f \in \mathcal{S}'$.

Es gilt, dass für f, g polynomial L^1-beschränkt und $f \neq g$ auch $T_f \neq T_g$ folgt.

Da alle Funktionen in $\mathcal{S}$ polynomial beschränkt sind, haben wir insbesondere eine natürliche Einbettung von $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$.

Bemerkung: Wann immer sich ein Element $T \in \mathcal{S}'$ mit Hilfe einer Funktion f in der Form $T(g) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ schreiben läßt, werden wir T_f mit f identifizieren.

4.4 Beispiel (Die $\mathcal{S}$-Distribution)**:**
Die Dirac'sche „Delta-Funktion" $\delta \in \mathcal{S}'$ ist für $f \in \mathcal{S}$ durch

$$\delta(f) = f(0)$$

definiert.

In Anlehnung an Beispiel 4.3 schreibt man oft

$$\delta(f) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \delta(x)f(x)\,\mathrm{d}x = f(0)$$

und für $a \in \mathbb{R}^d$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \delta(x-a) f(x)\,\mathrm{d}x = f(a)$$

Offensichtlich gibt es keine „echte“ Funktion $\delta(x)$, welche dies für alle $f \in \mathcal{S}$ leistet. Aber man kann $\delta(x)$ in $\mathcal{S}'$ durch echte Funktionen approximieren. Sei z.B. $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\int g\,\mathrm{d}x = 1$ und

$$g_n(x) = ng(nx)\,,$$

dann gilt mit dominierter Konvergenz für jedes stetige beschränkte f, also insbesondere für $f \in \mathcal{S}$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} T_{g_n}(f) &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, g_n(x) f(x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, g_n(x) f(0) + \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}x\, g_n(x)(f(x) - f(0)) \\ &= f(0) - \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{d}y\, \underbrace{g(y)(f(\tfrac{y}{n}) - f(0))}_{\to 0 \text{ punktweise}} = f(0) = \delta(f)\,.\end{aligned}$$

4.5 Definition:
Sei M ein metrischer Raum und M' sein Dualraum.

(i) Eine Folge $(m_n) \subset M$ konvergiert schwach gegen ein Element $m \in M$, falls $\lim_{n\to\infty} T(m_n) = T(m)$ für alle $T \in M'$.

Man schreibt dann

$$\operatorname*{w-lim}_{n\to\infty} m_n = m \quad \text{oder} \quad m_n \rightharpoonup m$$

(ii) Eine Folge $(T_n) \subset M'$ konvergiert schwach-* (sprich: „schwach Stern“) gegen ein Element $T \in M'$, falls $\lim_{n\to\infty} T_n(m) = T(m)$ für alle $m \in M$.

Man schreibt dann

$$\operatorname*{w^*\text{-}lim}_{n\to\infty} T_n = T \quad \text{oder} \quad T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T$$

In Beispiel 4.4 gilt also $T_{g_n} \overset{*}{\rightharpoonup} \delta$.

4.6 Satz:
Sei $A\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig und linear, dann wird durch

$$(\overline{A}T)(f) = T(Af),\ T \in \mathcal{S}' \text{ und } f \in \mathcal{S}$$

eine schwach-stetige lineare Abbildung $\overline{A}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ definiert.*

Beweis: Es gilt $\overline{A}T \in \mathcal{S}'$ für jedes $T \in \mathcal{S}'$, da $\overline{A}T = T \circ A$ die Komposition stetiger Abbildungen ist.

Nun zur Frage der schwach*-Stetigkeit von $\overline{A}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$:
Sei $T_n \overset{*}{\rightharpoonup} T$, dann gilt für alle $f \in \mathcal{S}$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{A}T_n(f) = \lim_{n\to\infty} T_n(Af) = T(Af) = \overline{A}T(f)$$

also $\overline{A}T_n \overset{*}{\rightharpoonup} \overline{A}T$. Damit haben wir schwach* Folgenstetigkeit der Abbildung $\overline{A}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ gezeigt. Die schwach*-Stetigkeit folgt aus dem gleichen Argument angewandt auf Netze statt Folgen. □

Es folgt eine Reihe von Korollaren in denen wir stetige Abbildungen $A\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ zu stetigen Abbildungen $\tilde{A}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ fortsetzen. Fortsetzen bedeutet dabei, dass für $f \in \mathcal{S}$ gelten soll

$$\tilde{A}T_f = T_{Af}$$

4.7 Definition (Fouriertransformation auf $\mathcal{S}'$)**:**
Für $T \in \mathcal{S}'$ ist die Fouriertransformierte $\widehat{T}$ durch

$$(\mathcal{F}T)(f) = \widehat{T}(f) := T(\widehat{f}) \quad \forall f \in \mathcal{S}$$

definiert.

4.8 Korollar:
$\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ ist eine schwach-stetige Bijektion, welche die Fouriertransformation auf $\mathcal{S}$ fortsetzt, das heißt für $f \in \mathcal{S}$ gilt $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$.*

Beweis: Da $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig ist, folgt die schwach*-Stetigkeit von $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ aus Satz 4.6. Die Bijektivität von $\mathcal{F}\colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ folgt aus der Bijektivität von $\mathcal{F}\colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$, denn auch für $T \in \mathcal{S}'$ gilt, dass $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T = T$ ist, da $\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}T(f) = \mathcal{F}T(\mathcal{F}^{-1}f) = T(\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}f) = T(f)$ für alle f.

Es bleibt zu zeigen, dass $\widehat{T_f} = T_{\widehat{f}}$. Für $g \in \mathcal{S}$ gilt: Sei $g \in \mathcal{S}$, dann gilt mit Satz 3.10

$$\widehat{T}_f(g) \overset{\text{Def}}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, f(x)\, \widehat{g}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \mathrm{d}x\, \widehat{f}(x)\, g(x) = T_{\widehat{f}}(g)\,.$$

□

4.9 Beispiel:
Die Fouriertransformierte der δ-Funktion ist wegen

$$\widehat{\delta}(f) = \delta(\widehat{f}) = \widehat{f}(0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{\mathbb{R}^d} (2\pi)^{-\frac{d}{2}} f(x)\,\mathrm{d}x$$

die konstante Funkton $\widehat{\delta}(x) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}}$

4.10 Definition (Distributionelle Ableitung)**:**
Für $T \in \mathcal{S}'$ ist die distributionelle Ableitung $\partial_x^\alpha T \in \mathcal{S}'$ definiert durch

$$(\partial_x^\alpha T)(f) = T((-1)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha f)$$

für alle $f \in \mathcal{S}$.

4.11 Korollar:
Die distributionelle Ableitung ist eine schwach-stetige lineare Abbildung von $\mathcal{S}'$ nach $\mathcal{S}'$, welche die Ableitung auf $\mathcal{S}$ fortsetzt, das heißt für $f \in \mathcal{S}$ ist*

$$\partial_x^\alpha T_f = T_{\partial_x^\alpha f}$$

Beweis: Man überlegt sich als Übungsaufgabe, dass $\partial_x^\alpha \colon \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ stetig ist. Dann folgt die Stetigkeit von $\partial_x^\alpha \colon \mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$ wieder aus Satz 4.6.

Die Fortsetzungseigenschaft $\partial_x^\alpha T_f = T_{\partial_x^\alpha f}$ folgt aus partieller Integration: Für $f, g \in \mathcal{S}$ ist

$$\begin{aligned}
(\partial_x^\alpha T_f)(g) &= T_f((-1)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha g) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} f(x)(-1)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha g\,\mathrm{d}x \\
&\overset{\alpha\text{-fache part. Int.}}{=} (-1)^{|\alpha|} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \partial_x^\alpha f(x)(-1)^{|\alpha|} g(x)\,\mathrm{d}x = T_{\partial_x^\alpha f}(g)
\end{aligned}$$

□

4.12 Beispiel (Ableitung der δ-Funktion)**:**

$$(\partial_x^\alpha \delta)(f) = \delta((-1)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha f) = (-1)^{|\alpha|}\partial_x^\alpha f(0)$$

Insbesondere ist $\delta'(f) = -f'(0)$.

Als weitere Übungsaufgabe berechne man die Fouriertransformierte der Ableitung der δ-Funktion in einer Dimension.

4.13 Korollar:
Sei $g \in C^\infty_{pol}(\mathbb{R}^d)$, dann wird durch

$$(gT)(f) = T(gf),\ f \in \mathcal{S}$$

eine schwach-stetige lineare Abbildung auf $\mathcal{S}'$ definiert, welcher die punktweise Multiplikation von Funktionen aus $\mathcal{S}$ mit g fortsetzt, das heißt $gT_f = T_{gf}$.*

Damit haben wir insbesondere auch die Wirkung von Pseudodifferentialoperatoren auf $\mathcal{S}'$ fortgesetzt:

$$g(-\mathrm{i}\nabla_x)T = \mathcal{F}^{-1} g(k) \mathcal{F} T$$

4.14 Definition (Faltung auf $\mathcal{S}'$)**:**
Sei $f \in \mathcal{S}$, $T \in \mathcal{S}'$ und $\tilde{f}(x) = f(-x)$. Dann ist die Faltung $T \star f \in \mathcal{S}'$ durch

$$(T \star f)(g) = T(\tilde{f} \star g)$$

für alle $g \in \mathcal{S}$ definiert.

4.15 Korollar:
Für $f \in \mathcal{S}$ ist die Abbildung $T \mapsto T \star f$ von $\mathcal{S}'$ nach $\mathcal{S}'$ schwach-stetig und setzt die Faltung mit Funktionen aus $\mathcal{S}$ fort, das heißt $T_f \star g = T_{f \star g}$*

Bemerkung: Die Fortsetzung einer stetigen linearen Abbildung von $\mathcal{S}$ auf $\mathcal{S}'$ ist eindeutig, da $\mathcal{S}$ in $\mathcal{S}'$ dicht liegt. Letzteres haben wir nicht gezeigt und es ist auch nicht ganz offensichtlich.

In diesem Sinne sind also schwache Ableitung, Fouriertransformation und Faltung auf $\mathcal{S}'$ eindeutig definiert.

Schließlich betrachten wir noch distributionelle Lösungen der Schrödingergleichung:

$$\begin{gathered} \mathrm{i}\dot{T}(t) = -\tfrac{1}{2}\Delta T(t) \\ \downarrow \mathcal{F} \\ \mathrm{i}\dot{\widehat{T}}(t) = \tfrac{k^2}{2}\,\widehat{T}(t) \\ \Rightarrow \widehat{T}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k^2}{2}t}\,\widehat{T}(0)\,. \end{gathered}$$

Es ist also $T(\cdot) \in \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d, \mathcal{S}')$ mit

$$T(t) = \mathcal{F}^{-1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{k^2}{2}t}\,\mathcal{F}T(0)$$

distributionelle Lösung der freien Schrödingergleichung für beliebige Anfangsdaten $T(0) \in \mathcal{S}'$.

Analog ist

$$T(t) = \underbrace{\mathcal{F}^{-1} \mathrm{e}^{-\frac{k^2}{2}t} \mathcal{F}}_{=:W(t)} T(0)$$

distributionelle Lösung der Wärmeleitungsgleichung.

Die Wärmeleitungshalbgruppe $W(t)$ ist glättend:
Sei $T_0 = T_{f_0}$ mit f_0 messbar und polynomial beschränkt, dann ist

$$T(t) = W(t) T_{f_0} = T_{f(t)}$$

mit

$$f(t,x) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int \mathrm{e}^{\frac{-|x-y|^2}{2t}} f_0(y)\,\mathrm{d}y$$

Es gilt $f(t) = \mathrm{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ für alle $t > 0$