6 Die Fouriertransformation auf endlichen abelschen Gruppen

Sei A eine endliche abelsche Gruppe. A verallgemeinert $\mathbb{R}^d$ (Fouriertransformation) bzw. $\mathbb{T}^d$ (der d-dimensionale Torus) (Fourierreihe). Natürlich sind $\mathbb{R}^d$ und $\mathbb{T}^d$ nicht endlich, aber das folgende läßt sich mit etwas mehr technischem Aufwand direkt auf lokalkompakte Abelsche Gruppen verallgemeinern. Oder man denkt an eine "Diskretisierung" von $\mathbb{T}^d$ durch N Gitterpunkte in jeder Richtung, also an $(\mathbb{Z}/N)^d$. Letztere ist immer dann relevant, wenn man periodische Funktionen numerisch behandeln möchte.

Die endliche Gruppe A heißt zyklisch, falls sie von einem Element $\tau \in A$ erzeugt wird, also $A = \left\{e, \tau, \tau^2, \tau^3, \ldots, \tau^{N-1}\right\}$ mit $N = |A|$. Insbesondere ist $\mathbb{Z}/N = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\}$ mit $e = 0$ und der Verknüpfung $+$ zyklisch.

6.1 Satz:
Jede endliche abelsche Gruppe A ist isomorph zu einem Produkt $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_k$ zyklischer Gruppen.

Der Einheitskreis $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ bildet mit der Multiplikation komplexer Zahlen als Gruppenverknüpfung eine abelsche Gruppe. Ein Gruppenhomomorphismus $\chi\colon A \to \mathbb{T}$, das heißt $\chi(a)\chi(b) = \chi(ab)\ \forall a, b \in A$ heißt *Charakter* von A.

Mit $\widehat{A}$ bezeichnet man die Menge aller Charaktere von A.

6.2 Lemma:
Das punktweise Produkt $\widehat{A} \times \widehat{A} \to \widehat{A}\colon (\chi, \eta) \mapsto \chi\eta$ mit $\chi\eta(a) = \chi(a)\eta(a)$ macht $\widehat{A}$ selbst zu einer abelschen Gruppe. Man nennt $\widehat{A}$ die duale Gruppe oder das Pontryagin-Dual von A.

Beweis: Für $a, b \in A$ gilt

$$\chi\eta(ab) = \chi(ab)\eta(ab) = \chi(a)\chi(b)\eta(a)\eta(b) = \chi(a)\eta(a)\chi(b)\eta(b) = \chi\eta(a)\chi\eta(b)$$

Also $\chi\eta \in \widehat{A}$. $\widehat{A}$ ist eine Gruppe, da $e\colon A \to \mathbb{T}, a \mapsto 1 \in \widehat{A}$ und mit obiger Rechnung ist auch $\chi^{-1} \in \widehat{A}$ falls $\chi \in \widehat{A}$, wobei $\chi^{-1}(a) = (\chi(a))^{-1} = \overline{\chi(a)}$ □

6.3 Lemma:
Sei A zyklisch, $|A| = N$ und $\tau \in A$ Generator, also $A = \left\{e, \tau, \tau^2, \ldots, \tau^{N-1}\right\}$ und $\tau^N = e$.

Die Charaktere von A sind

$$\eta_n(\tau^m) = \mathrm{e}^{2\pi i \frac{mn}{N}},\ m \in \mathbb{Z}$$

für $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

$\widehat{A}$ ist also wieder zyklisch mit Generator η_1 und $|\widehat{A}| = N$.

Beweis: Sei $\eta \in \widehat{A}$. Dann gilt

$$\eta(\tau)^N = \underbrace{\eta(\tau) \cdot \cdots \cdot \eta(\tau)}_{N\text{-mal}} = \eta(\tau^N) = \eta(e) = 1$$

Also existiert ein $n \in \{0, \ldots, N-1\}$ mit $\eta(\tau) = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n}{N}}$. Für $m \in \mathbb{Z}$ folgt dann $\eta(\tau^m) = \eta(\tau)^m = \mathrm{e}^{\frac{2\pi i n m}{N}}$.

Also ist jeder Charakter von der Form η_n für ein $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$. Wegen $\eta_n \neq \eta_m$ für $n \neq m$ folgt die Behauptung. $\square$

Als zyklische Gruppe der Ordnung N sind A und $\widehat{A}$ also isomorph, aber nicht in kanonischer Weise. Aber A und $\widehat{\widehat{A}}$ sind kanonisch isomorph:

6.4 Satz:
Sei A endliche abelsche Gruppe. Dann ist die Abbildung $A \to \widehat{\widehat{A}}$, welche $a \in A$ auf die Punktauswertung $\delta_a \in \widehat{\widehat{A}}$ abbildet, also

$$\delta_a \colon \widehat{A} \to \mathbb{T}, \chi \mapsto \delta_a(\chi) = \chi(a)$$

ein (kanonischer) Isomorphismus.

Beweis: Wegen

$$\delta_{ab}(\chi) = \chi(ab) = \chi(a)\chi(b) = \delta_a(\chi)\delta_b(\chi)$$

ist $a \mapsto \delta_a$ ein Gruppenhomomorphismus.

Sei $a \in A$. Wir zeigen: $\chi(a) = 1$ für alle $\chi \in \widehat{A}$ impliziert, dass $a = e$ sein muss und somit $a \mapsto \delta_a$ injektiv ist. Wegen Lemma 6.3 gilt die Aussage für zyklische A. Mit Satz 6.1 genügt es zu zeigen, dass mit A und B auch $A \times B \to \widehat{\widehat{A \times B}}$ injektiv ist. Sei also $(a_0, b_0) \in A \times B$ mit $\eta(a_0, b_0) = 1$ für alle $\eta \in \widehat{A \times B}$. Für $\chi \in \widehat{A}$ ist $\chi(a, b) := \chi(a)$ Charakter von $A \times B$ und somit $\chi(a_0) = 1$. Nach Annahme folgt $a_0 = e$ und analog $b_0 = e$.

Surjektivität folgt aus $|A| = |\widehat{A}| = |\widehat{\widehat{A}}|$ für zyklische Gruppen und mit Satz 6.1 für alle endlichen, da $\widehat{A \times B}$ isomorph zu $\widehat{A} \times \widehat{B}$ ist: zu $\chi \in \widehat{A \times B}$ setze $\chi_1 \in \widehat{A}$ und $\chi_2 \in \widehat{B}$ durch

$$\chi_1(a) := \chi(a, e)\,, \qquad \chi_2(b) := \chi(e, b)\,,$$

dann gilt für alle $(a, b) \in A \times B$

$$\chi(a, b) = \chi((a, e) \cdot (e, b)) = \chi(a, e)\chi(e, b) = \chi_1(a)\chi_2(b)\,.$$

□

Sei nun $\ell^2(A)$ der Raum aller Abbildungen von A nach $\mathbb{C}$. Dann sind die Charaktere $\chi\colon A \to \mathbb{T} \subset \mathbb{C}$ offensichtlich Elemente von $\ell^2(A)$.

6.5 Lemma:
Seien $\chi, \eta \in \widehat{A}$, dann gilt

$$\langle \chi, \eta \rangle_{\ell^2(A)} = \begin{cases} |A| & \textit{falls } \chi = \eta \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases}$$

Die Funktionen $\left(\frac{\chi}{\sqrt{|A|}}\right)_{\chi \in \widehat{A}} \subset \ell^2(A)$ bilden also eine Orthonormalbasis von $\ell^2(A)$.

Beweis: Sei zunächst $\eta = \chi$, dann ist

$$\langle \chi, \eta \rangle = \sum_{a \in A} \overline{\chi}(a)\eta(a) = \sum_{a \in A} \underbrace{|\chi(a)|^2}_{=1} = |A|$$

Falls $\chi \neq \eta$, dann ist $\alpha = \chi^{-1}\eta \neq 1$ und somit

$$\langle \chi, \eta \rangle = \sum_{a \in A} \overline{\chi}(a)\eta(a) = \sum_{a \in A} \chi^{-1}(a)\eta(a) = \sum_{a \in A} \alpha(a)$$

Sei nun $b \in A$ mit $\alpha(b) \neq 1$. Dann ist

$$\langle \chi, \eta \rangle\, \alpha(b) = \sum_{a \in A} \alpha(a)\alpha(b) = \sum_{a \in A} \alpha(ab) = \sum_{c \in A} \alpha(c) = \sum_{a \in A} \alpha(a) = \langle \chi, \eta \rangle$$

Also muss $\langle \chi, \eta \rangle = 0$ gelten. □

6.6 Definition:
Für $f \in \ell^2(A)$ ist die Fouriertransformierte $\hat{f} \in \ell^2(\widehat{A})$ gegeben durch

$$\hat{f}(\chi) = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \langle \chi, f \rangle_{\ell^2(A)} = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{a \in A} \overline{\chi}(a) f(a)$$

Bemerkung: Für die Fouriertransformation $\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ ist $A \cong \widehat{A} \cong \mathbb{R}^d$ und die Charaktere sind $\chi_k(x) = \mathrm{e}^{ik \cdot x}$ für $k \in \mathbb{R}^d$ und $x \in \mathbb{R}^d$.

Für die Fourierreihenbildung

$$\mathcal{F}\colon L^2(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})\colon f \mapsto c_n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \mathrm{e}^{-inx} \,\mathrm{d}x$$

ist $A = \mathbb{T}$ und $\widehat{A} \cong \mathbb{Z}$ und die Charaktere sind $\chi_n(x) = \mathrm{e}^{inx}$ für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{T}$ wobei wir $[-\pi, \pi]$ mit $\mathbb{T}$ identifizieren.

6.7 Satz:
Die Abbildung $\mathcal{F}\colon \ell^2(A) \to \ell^2(\widehat{A}), f \mapsto \hat{f}$ ist ein isometrischer Isomorphismus, also unitär.

Angewandt auf die Gruppe $\widehat{A}$ liefert die Konstruktion eine Abbildung

$$\mathcal{F}\colon \ell^2(\widehat{A}) \to \ell^2(\widehat{\widehat{A}})$$

und zweimalige Anwendung von $\mathcal{F}$ liefert $\hat{\hat{f}}(\delta_a) = f(a^{-1})$.

Beweis: $\mathcal{F}$ unitär, da die $\left(\frac{\chi}{\sqrt{|A|}} \right)_{\chi \in \widehat{A}}$ eine Orthonormalbasis bilden.

$$\begin{aligned}
\hat{\hat{f}}(\delta_a) &= \frac{1}{\sqrt{|\widehat{A}|}} \sum_{\chi \in \widehat{A}} \overline{\delta_a(\chi)} \hat{f}(\chi) = \frac{1}{|A|} \sum_{\chi \in \widehat{A}} \overline{\chi(a)} \sum_{b \in A} \overline{\chi(b)} f(b) \\
&= \frac{1}{|A|} \sum_{b \in A} f(b^{-1}) \sum_{\chi \in \widehat{A}} \overline{\chi(a) \chi(b^{-1})} \\
&= \frac{1}{|A|} \sum_{b \in A} f(b^{-1}) \underbrace{\langle \delta_a, \delta_b \rangle_{\ell^2(\widehat{A})}}_{= \delta_{a,b}} = f(a^{-1})
\end{aligned}$$

$\square$

Also ist $\mathcal{F}^{-1}\colon \ell^2(\widehat{A}) \to \ell^2(A), f \mapsto \check{f}(a) = \hat{f}(\delta_{a^{-1}})$ die Inverse zu $\mathcal{F}\colon \ell^2(A) \to \ell^2(\widehat{A})$

Auch das Konzept der Faltung läßt sich in natürlicher Weise auf abelsche Gruppen verallgemeinern.

6.8 Definition:
Für $f, g \in \ell^2(A)$ sei

$$f \star g(a) = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{b \in A} f(b) g(b^{-1}a)$$

die *Faltung* von f und g.

6.9 Satz:
Für $f, g \in \ell^2(A)$ gilt

$$\widehat{f \star g} = \hat{f}\hat{g}$$

Insbesondere folgt daraus sofort, dass $\star$ assoziativ, distributiv und kommutativ ist, also $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$, $f \star (g + h) = f \star g + f \star h$ und $f \star g = g \star f$.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\widehat{f \star g}(\chi) &= \frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{b \in A} (f \star g)(b)\overline{\chi(b)} = \frac{1}{|A|} \sum_{b \in A} \sum_{a \in A} f(a) g(a^{-1}b) \overline{\chi}(b) \\
&= \frac{1}{|A|} \sum_{a,c \in A} f(a) g(c) \overline{\chi(ac)} = \frac{1}{|A|} \left(\sum_{a \in A} f(a) \overline{\chi(a)} \right) \left(\sum_{c \in A} g(c) \overline{\chi(c)} \right) \\
&= \hat{f}(\chi) \hat{g}(\chi)
\end{aligned}$$

für alle $\chi \in \widehat{A}$. □

Bemerkung: Zur Illustration wollen wir nun noch die abstrakte Fouriertransformation auf der endlichen abelschen Gruppe $A = \{e, \tau, \tau^2, \tau^3, \ldots, \tau^{N-1}\}$ zur Fouriertransformation einer "diskretisierten" Funktion auf einem Interlvall $f : [0, \ell] \to \mathbb{C}$ zurückübersetzen. Wir diskretisieren also das Intervall $[0, \ell]$ durch

$$x \in \left\{ 0, \frac{\ell}{N}, 2\,\frac{\ell}{N}, \ldots, (N-1)\,\frac{\ell}{N} \right\},$$

also $e = 0$ und $\tau = \ell/N$. Dann können wir die Charaktere ausdrücken durch

$$\eta_n(\tau^m) = \mathrm{e}^{2\pi i \frac{mn}{N}} = \mathrm{e}^{2\pi i \frac{xn}{\ell}} = \eta_n(x),$$

wobei $x = m\frac{\ell}{N}$ ist. Die Fouriertransformierte der Funktion

$$f : \left\{0, \tfrac{\ell}{N}, 2\,\tfrac{\ell}{N}, \dots, (N-1)\,\tfrac{\ell}{N}\right\} \to \mathbb{C}$$

ist nun

$$c_n := \hat{f}(\eta_n) = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_x \overline{\eta_n(x)}\, f(x) = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_x \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{xn}{\ell}}\, f(x)\,.$$

Die Rücktransformierte (also die Fourierreihe von f) ist

$$f(x) = \hat{\hat{f}}(\delta_{x^{-1}}) = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \overline{\delta_{x^{-1}}(n)}\, \hat{f}(\eta_n) = \tfrac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^{N-1} \mathrm{e}^{2\pi i \frac{xn}{\ell}}\, c_n\,,$$

da $x^{-1} = \ell - x$ und somit

$$\delta_{x^{-1}}(n) = \eta_n(x^{-1}) = \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{xn}{\ell}}\,.$$

Bemerkung: Implementiert man die diskrete Fouriertransformation numerisch, so läßt sich der Aufwand mit Hilfe eines einfachen Tricks reduzieren, was dann auf die sogenannte "schnelle Fouriertransformation" (FFT) führt: zur Illustration betrachte die DFT auf $2N$ Punkten, dann ist

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \tfrac{1}{\sqrt{2N}} \sum_x \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{xn}{\ell}}\, f(x) \;=\; \tfrac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{m=0}^{2N-1} \mathrm{e}^{-\pi i \frac{mn}{N}}\, f(x_m) \\
&= \tfrac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\pi i \frac{2kn}{N}}\, f(x_{2k}) + \tfrac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-\pi i \frac{(2k+1)n}{N}}\, f(x_{2k+1}) \\
&=: \tfrac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{kn}{N}}\, f(x_k^g) + \tfrac{\mathrm{e}^{-i\pi \frac{n}{N}}}{\sqrt{2N}} \sum_{k=0}^{N-1} \mathrm{e}^{-2\pi i \frac{kn}{N}}\, f(x_k^u) \\
&= \begin{cases} \hat{f}_g(n) + \mathrm{e}^{-i\pi \frac{n}{N}}\, \hat{f}_u(n) & \text{falls } n < N \\ \hat{f}_g(n-N) + \mathrm{e}^{-i\pi \frac{n-N}{N}}\, \hat{f}_u(n-N) & \text{falls } n \geq N \end{cases}\,.
\end{aligned}$$

Hier bezeichnen $x_k^g = x_{2k}$ bzw. $x_k^u = x_{2k+1}$ die Punkte mit geraden bzw. ungeraden Indices und f_g bzw. f_u die Einschränkung von f auf die Punkte mit geraden bzw. ungeraden Indices.

Anstelle einer DFT für f auf $2N$ Punkten kann man also zwei DFTs auf jeweils N Punkten machen. Da bei einer direkten Berechnung der DFT auf N Punkten ca. N^2 Multiplikationen notwendig sind, liefert dieser Trick eine Reduktion von $4N^2$ auf $2N^2$ Multiplikationen. Iteriert man das Verfahren für $N = 2^j$, so läßt sich die Komplexität des Problems von N^2 auf $N \log N$ reduzieren.