Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

SS 2012
28.07.2012

Klausur zu „Mathematik für Physiker 2“

1. a) (2 Punkte) Sei $n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^n = 1$ in $\mathbb{C}$, das heißt, geben Sie eine maximale Lösungsmenge mit paarweise verschiedenen Elementen an. (Hinweis: Benutzen Sie die Polardastellung $z = re^{i\phi}$, $r \geq 0$, $\phi \in \mathbb{R}$).

   b) (2 Punkte) Beweisen Sie: $z \in \{\tilde{z} \in \mathbb{C};\ |\tilde{z}| = 1\} \setminus \{-1\}$ genau dann, wenn ein eindeutiges $\lambda \in \mathbb{R}$ existiert mit $z = \frac{1+i\lambda}{1-i\lambda}$.

2. a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das Tupel (x_1, x_2, x_3) von Vektoren im $\mathbb{R}^3$ mit
$$x_1 = (1, 2, -1), \quad x_2 = (0, -1, 0), \quad x_3 = (1, 0, 2)$$
   linear unabhängig ist.

   b) (2 Punkte) Betrachten Sie nun $\mathbb{R}$ als $\mathbb{Q}$-Vektorraum. Geben Sie ein Paar $\mathbb{Q}$-unabhängiger Vektoren (x, y), $x, y \in \mathbb{R}$ an und begründen Sie Ihre Wahl.

3. a) (2 Punkte) Begründen Sie, warum
$$C = \left\{ \left(x, x^2\right) \in \mathbb{R}^2;\ x \in \mathbb{R} \right\}$$
   kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

   b) (2 Punkte) Begründen Sie, warum folgende Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,
$$f((x, y)) = x + y$$
   linear ist und bestimmen Sie die Matrix $M(f; \mathcal{A}, \mathcal{B})$ von f bezüglich der Basen $\mathcal{A} = (f_1, f_2)$ mit $f_1 = (1, 0)$, $f_2 := (1, -1)$ und $\mathcal{B} = (g_1)$ mit $g_1 = 2$.

4. Sei $A \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^3$ gegen durch
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

   a) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau eine Lösung $x_0 \in \mathbb{R}^3$ hat und bestimmen Sie diese.

   b) (2 Punkte) Warum ist A invertierbar? Bestimmen Sie A^{-1} und prüfen Sie, dass $x_0 = A^{-1}b$ ist.

Die Klausur ist mit 8 Punkten bestanden.

Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!