Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2012

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

06.07.2012
Blatt 11

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte) Bringen Sie die folgenden (reellen) Matrizen A und B (mit Angabe der Elementarmatrizen ihrer Umformungen) auf Zeilenstufenformen und bestimmen Sie ihren Rang:
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

2. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch
$$f(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_1 - x_2).$$
Sei weiter $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ mit $v_1 = e_1 + e_2$ und $v_2 = e_2$ Bestimmen Sie die Basiswechselmatrizen S von $\mathcal{K}$ auf $\mathcal{A}$ und T von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{K}$ sowie die Matrizen $A = M(f; \mathcal{K}, \mathcal{K})$ und $B = M(f; \mathcal{A}, \mathcal{A})$ und überprüfen Sie die Formel $B = SAT$.

3. (4 Punkte)
   a) Zeigen Sie: Sind $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ mit $AB = E$, so ist auch $BA = E$. (Hinweis: Überlegen Sie zunächst, warum aus $AB = E$ schon folgt, dass A invertierbar ist)
   b) Für $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ ist $\mathrm{rg}\, A = 1$ genau dann, wenn es $\boldsymbol{a} \in \mathbb{K}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$ und $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $A = \boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^T$ gibt.

4. (4 Punkte) Seien V und W endlich dimensionale Vektorräume, $\mathcal{A}$ eine Basis von V, $\mathcal{B}$ eine Basis von W sowie $\mathcal{A}^*$ die zu $\mathcal{A}$ duale Basis von V^* und $\mathcal{B}^*$ die zu $\mathcal{B}$ duale Basis von W^* (vgl. Blatt 8 Aufgabe 4). Sei weiter $f : V \to W$ linear.
   a) Wir setzen $f^* : W^* \to V^*$, $f^*(\mu) := \mu \circ f$, $\mu \in W^*$, und nennen dies die zu f duale Abbildung. Zeigen Sie, dass f^* linear ist.
   b) Sei $A = M(f; \mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$ und $B = M(f^*; \mathcal{B}^*, \mathcal{A}^*) \in \mathrm{Mat}(n, m; \mathbb{K})$. Zeigen Sie: $B = A^T$.

Abgabe: Freitag, 13.07.2012, 9 Uhr in der Vorlesung