Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2012
13.07.2012
Blatt 12

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte) Lösen Sie das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rrrrrcl} x_1 & +\,5x_2 & & +\,x_4 & +\,4x_5 & = & 1 \\ -\,x_1 & -\,5x_2 & +\,x_3 & -\,3x_4 & -\,4x_5 & = & 0 \\ -\,x_1 & -\,5x_2 & +\,2x_3 & -\,5x_4 & -\,4x_5 & = & 1 \\ x_1 & +\,5x_2 & -\,x_3 & +\,3x_4 & +\,4x_5 & = & 0 \end{array}.$$

2. (4 Punkte)

   a) Sei $A \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{K}^m$ und $L = L_{A,\boldsymbol{b}} = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{K}^n;\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}\}$. Zeigen Sie: Sind $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in L$, $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{y}$, so ist die ganze Gerade $\{(1-\lambda)\boldsymbol{x} + \lambda\boldsymbol{y};\ \lambda \in \mathbb{K}\} \subset L$.

   b) Sei $A \in \mathrm{Mat}(m, 2; \mathbb{R})$, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ $(m \in \mathbb{N})$. Geben Sie alle Möglichkeiten an, wie $L = L_{A,\boldsymbol{b}} \subset \mathbb{R}^2$ aussehen kann.

3. (4 Punkte) Gegeben seien $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_4$ durch

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

   sowie $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{S}_n$, $n \geq 2$.

   a) Berechnen Sie $\sigma_1\sigma_2$ und $\sigma_2\sigma_1$.

   b) Berechnen Sie $\mathrm{sgn}(\sigma_1)$, $\mathrm{sgn}(\sigma_2)$, $\mathrm{sgn}(\sigma_1\sigma_2)$ und $\mathrm{sgn}(\sigma_2\sigma_1)$.

   c) Zeigen Sie, $\prod\limits_{1 \leq i < k \leq n} (\widetilde{\sigma}(k) - \widetilde{\sigma}(i)) = \mathrm{sgn}(\widetilde{\sigma}) \prod\limits_{l=1}^{n-1} (l!)$.

   d) Zeigen Sie, $\sum\limits_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \mathrm{sgn}\,\sigma = 0$, $n \geq 2$.

4. (4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$. Man definiert dann die Spur von A durch $\mathrm{Spur} : \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$,

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{l=1}^{n} a_{ll}.$$

   a) Zeigen Sie, dass Spur linear ist und für alle $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{K})$ gilt:

$$\mathrm{Spur}(AB) = \mathrm{Spur}(BA).$$

b) Sei nun V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\mathcal{A}$ eine Basis von V. Man definiert für einen Endomorphismus $f : V \to V$:

$$\operatorname{Spur}(f) := \operatorname{Spur}(M(f; \mathcal{A}, \mathcal{A})).$$

Zeigen Sie, dass $\operatorname{Spur} : \operatorname{End}(K) \to \mathbb{K}$ wohldefiniert ist (d.h.: nicht von $\mathcal{A}$ abhängt), linear ist und für alle $f, g \in \operatorname{End}(V)$ gilt: $\operatorname{Spur}(gf) = \operatorname{Spur}(fg)$.

Abgabe: Freitag, 20.07.2012, 9 Uhr in der Vorlesung