Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2012
25.05.2012
Blatt 6

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

   a) Seien $v_1, \ldots, v_r \in V$, $r \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann
   $$U := \{\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r;\ \lambda_i \in \mathbb{K},\ i = 1, \ldots, r\}$$
   ein Unterraum in V ist.

   b) Seien $V_1, V_2 \subset V$ Unterräume von V. Zeigen Sie dass $V_1 \cup V_2$ genau dann ein Unterraum von V ist wenn $V_1 \subset V_2$ oder $V_2 \subset V_1$.

2. (4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper und
   $$V = \left\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{K}^3;\ x_1 + x_2 + x_3 = 0\right\}.$$

   a) Zeigen Sie, dass V ein Unterraum von $\mathbb{K}^3$ ist.

   b) Sei $v_1 = (1, -1, 0)$ und $v_2 = (1, 0, -1)$. Zeigen Sie, dass V von (v_1, v_2) erzeugt wird. Ist (v_1, v_2) eine Basis von V?

3. (4 Punkte)

   a) Sei $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathrm{Abb}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Folgen. Zeigen Sie, dass
   $$c := \left\{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}};\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist konvergent}\right\}$$
   ein Unterraum von $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ist.

   b) Sei $\mathbb{F}_2$ der zweielementige Körper (mit den Elementen 0 und 1) gegeben durch die Verknüpfungen
   $$\begin{array}{c|cc} + & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}, \qquad \begin{array}{c|cc} \bullet & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}.$$
   Geben Sie eine Teilmenge U von $(\mathbb{F}_2)^2$ an, die die $\mathbf{0} = (0, 0)$ enthält, aber kein Unterraum ist.

4. (4 Punkte) Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

   a) Das Tripel $(1, \cos, \sin)$ ist linear unabhängig in V.

   b) Das Tripel $(1, \cos^2, \sin^2)$ ist linear abhängig in V.

Abgabe: Freitag, 08.06.2012, 9 Uhr in der Vorlesung