Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2012

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

22.06.2012
Blatt 9

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte)

   a) Seien $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch
   $$f(x_1, x_2) := (x_1 + x_2, x_1 - x_2),$$
   $$g(x_1, x_2) := (x_1 + x_2, x_1 + x_2).$$
   Bestimmen Sie Kern und Bild von f und g.

   b) Es seien X eine Menge, V ein Vektorraum über $\mathbb{K}$ und $f : X \to V$ eine bijektive Abbildung. Zeigen Sie, dass X mit den Verknüpfungen
   $$x + y := f^{-1}(f(x) + f(y)), \quad x, y \in X,$$
   $$\lambda x := f^{-1}(\lambda f(x)), \quad x \in X, \quad \lambda \in \mathbb{K},$$
   ein Vekorraum über $\mathbb{K}$ ist.

2. (4 Punkte)

   a) Berechnen Sie die Produkte AB and BA für
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

   b) Geben Sie zwei 2×2-Matrizen A, B an, so dass $AB \neq BA$.

3. (4 Punkte) Beweisen Sie das Assoziativgesetz für Matrizen: Sind $m, n, r, s \in \mathbb{N}$, $A \in \mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n, r, \mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{Mat}(r, s, \mathbb{K})$, so gilt:
   $$(AB)C = A(BC).$$

4. (4 Punkte) Sei V ein Vektorraum und $U \subset V$ ein Unterraum. Auf der Menge $V/U := \{v + U;\ v \in V\}$ der Linksnebenklassen $v + U := \{v + u;\ u \in U\} \subset V$ führen wir folgende Veknüpfungen ein:
   $$(v_1 + U) + (v_2 + U) := (v_1 + v_2) + U, \quad \lambda \cdot (v + U) := (\lambda v) + U,$$
   für $v_1, v_2 \in V$ und $\lambda \in K$.

   a) Zeigen Sie, dass $+$ und $\cdot$ wohldefiniert sind und V/U zu einem Vektorraum machen (dem Quotientenruam von V nach U).

   b) Sei $\pi : V \to V/U$ gegeben durch $\pi(v) = v + U$. Zeigen Sie, dass π linear und $\ker \pi$=U ist.

c) Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension und U ein Unterraum. Zeigen Sie,

$$\dim(V/U) + \dim U = \dim V.$$

d) Geben Sie ein Äquvivalenzrelation $\sim$ auf V an, ohne die Menge $v + U$ zu benutzen, so dass für die ensprechenden Äquivalenzklassen gilt:

$$[v] = \{u \in V;\ u \sim v\} = v + U, \quad \forall v \in V.$$

Abgabe: Freitag, 29.06.2012, 9 Uhr in der Vorlesung