Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2012
20.04.2012
Blatt 1

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte)

   a) Sei $P \in \mathbb{R}[X]$ ein Polynom vom Grad kleiner oder gleich n und es gelte $\lim\limits_{x\to 0} \frac{P(x)}{x^n} = 0$. Zeigen Sie, dass $P \equiv 0$ sein muss. (Hinweis: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{P(x)}{x^k} = 0$ für $k = 0, \ldots, n$.)

   b) Sei nun $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall mit $0 \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Zeigen Sie, dass es höchstens ein Polynom $P \in \mathbb{R}[X]$ vom Grad kleiner gleich n geben kann mit $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-P(x)}{x^n} = 0$.

2. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahlenfolge $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann Cauchy-Folge ist, wenn die reellen Zahlenfolgen $(\mathrm{Re}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(\mathrm{Im}(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es sind.

3. (4 Punkte) Beweisen Sie: Für alle $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

   a) $\overline{\overline{z}} = z$

   b) $\overline{z_1} + \overline{z_2} = \overline{z_1 + z_2}$

   c) $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

   d) $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$

   e) $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ (Dreiecksungleichung)

   f) $|z_1 z_2| = |z_1|\,|z_2|$

4. (4 Punkte) Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ eine nur bedingt konvergente reelle Reihe. Zeigen Sie, dass es zu jedem $c \in \mathbb{R}$ eine Umordnung $\tau : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_{\tau(n)}$ gegen c konvergiert. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass die Summe der positiven Summanden gengen ∞ und die negativen gegen $-\infty$ geht. Nehmen Sie dann (bei $c > 0$) zunächst so viele positive Summanden, bis Sie c zum ersten mal überschreiten. Nehmen Sie dann so viele negative Summanden, bis Sie, wenn sie diese aufaddieren c zum 1. Mal unterschreiten, usw.)

Abgabe: Freitag, 27.04.2012, 9 Uhr in der Vorlesung