Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

SS 2012
29.06.2012
Blatt 10

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass die Elementarmatrizen $F_i(\lambda)$, $G_{ij}(\lambda)$ und H_{ij} invertierbar sind und bestimmen Sie jeweils die Inversen.

2. (4 Punkte) Sei R ein Ring mit Eins.

   a) Beweisen Sie die Gleichung $(rs)^{-1} = s^{-1}r^{-1}$, $r, s \in R^*$, und zeigen Sie, dass die Einheiten R^* (zusammen mit der Multiplikation) eine Gruppe bilden.

   b) Bestimmen Sie die Einheiten in folgenden Ringen: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$, $R[X]$, $\mathrm{Mat}_2(\mathbb{C})$.

3. (4 Punkte) Zeigen Sie, dass folgende Matrizen $A, B \in \mathrm{Mat}_n(\mathbb{C})$ invertierbar sind und bestimmen Sie A^{-1} und B^{-1}.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \mathrm{e} & \pi \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}.$$

4. (4 Punkte)

   a) Es seien die beiden Blockmatrizen

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1m} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ B_{n1} & B_{n2} & \dots & B_{nm} \end{pmatrix}$$

   gegeben, wobei $A_{\mu\nu} \in \mathrm{Mat}(i_\mu, k_\nu; \mathbb{K})$, $\mu = 1, \dots, m$, $\nu = 1, \dots, n$, und $B_{\mu\nu} \in \mathrm{Mat}(k_\mu, l_\nu; \mathbb{K})$, $\mu = 1, \dots, n$, $\nu = 1, \dots, m$. Zeigen Sie dass $C := AB$ gegeben ist durch

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1m} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mm} \end{pmatrix},$$

   wobei gilt $C_{\mu\nu} = \sum_{\rho=1}^{n} A_{\mu\rho} B_{\rho\nu}$.

b) Es seien die Matrizen $A \in \mathrm{Mat}(n, n; \mathbb{K})$, $B \in \mathrm{Mat}(n, m; \mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{Mat}(m, m; \mathbb{K})$, sowie die Blockmatrix ($0 \in \mathrm{Mat}(m, n; \mathbb{K})$)

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

gegeben. Zeigen Sie, dass M invertierbar ist, genau dann wenn A und C invertierbar sind und beweisen die Formel (falls invertierbar)

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

Abgabe: Freitag, 06.07.2012, 9 Uhr in der Vorlesung