Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

SS 2012
18.05.2012
Blatt 5

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte) Sei K ein Körper und $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass K^n mit den Verknüpfungen $+$ und $\cdot$ aus der Vorlesung ein K-Vektorraum ist.

2. (4 Punkte)

   a) Sei M eine Menge und $G = \mathrm{Bij}(M)$ die Menge der bijektiven Selbstabbildungen von M. Zeigen Sie, dass G mit der Verkettung eine Gruppe ist, die nicht abelsch ist, falls M mindestens 3 Elemente hat.

   b) Für $M = \{1, \ldots, n\}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichnet $S_n := \mathrm{Bij}(M)$ die symmetrische Gruppe in n Einträgen. Zeigen Sie für die Ordnung $|S_n|$ von S_n (d.i. die Anzahl der Elemente): $|S_n| = n!$.

3. (4 Punkte) Sei M eine Menge. Eine Äquivalenzrelation auf M ist eine Teilmenge $R \subset M \times M$ mit folgenden Eigenschaften (statt $(a,b) \in R$ schreiben wir $a \sim b$)

   i) Für alle $a \in M$ gilt (Reflexivität): $a \sim a$,

   ii) für alle $a, b \in M$ gilt (Symmetrie): $a \sim b \quad \Rightarrow \quad b \sim a$,

   iii) für alle $a, b, c \in M$ gilt (Transitivität): $a \sim b,\ b \sim c \quad \Rightarrow \quad a \sim c$.

   Die Äquivalenzklasse von $a \in M$ ist dann die Teilmenge $[a] := \{b \in M;\ a \sim b\}$ und die (Quotienten-) Menge aller Äquivalenzklassen ist ($P(M)$ Potenzmenge)

   $$M/\sim := \{[a] \subset M;\ a \in M\} \subset P(M).$$

   Zeigen Sie:

   a) Für $a, b \in M$ gilt: Entweder ist $[a] = [b]$ oder $[a] \cap [b] = \emptyset$. (Man sagt: M wird durch die Äquivalenzklassen von $\sim$ partitioniert).

   b) Sei umgekehrt $M = \dot{\bigcup\limits_{i \in I}} K_i$ eine Partitionierung (disjunkte Vereinigung) von M (I eine Indexmenge). Definieren Sie für $a, b \in M$: $a \sim b :\Leftrightarrow \quad \exists i \in I : a, b \in K_i$. Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf M ist und K_i ($i \in I$) gerade die Äquivalenzklassen von $\sim$ sind.

4. (4 Punkte) Sei $M = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $a \sim b :\Leftrightarrow \quad n|(b-a)$, für $a, b \in \mathbb{Z}$ (d.h. n ist ein Teiler von $b - a$, d.h.: $\exists k \in \mathbb{Z} : \quad b - a = kn$).

   a) Zeigen Sie, dass durch $\sim$ eine Äquivalenzrelation gegeben ist.

b) Man definiert für Äquivalenzklassen $[a], [b] \in C_n := \mathbb{Z}/\sim$:

$$[a] + [b] := [a + b].$$

Zeigen Sie, dass $+ \colon C_n \times C_n \to C_n$ wohldefiniert ist (d.h. unabhängig von den jeweiligen Repräsentanten) und $(C_n, +)$ eine abelsche Gruppe ist.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie $|C_n| = n$.

Abgabe: Freitag, 25.05.2012, 9 Uhr in der Vorlesung