Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

SS 2012
08.06.2012
Blatt 7

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte) Sei V ein Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.
   a) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein minimales Erzeugendensystem von V.
   b) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist eine Basis von V.
   c) $(v_1, \ldots, v_n)$ ist ein maximales System linear unabhängiger Vektoren.
2. (4 Punkte)
   a) Zeigen Sie $\dim_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} = \infty$ (Hinweis: $\mathbb{R}$ ist überabzählbar).
   b) Sei V ein Vekorraum und seien U_k, $k = 1, \ldots, r$, Unterräume von V. Beweisen Sie,
   $$\dim\left(\sum_{k=1}^{r} U_k\right) + \sum_{j=2}^{r} \dim\left(U_j \cap \sum_{k=1}^{j-1} U_k\right) = \sum_{k=1}^{r} \dim U_k.$$
3. (4 Punkte) Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, $V = \mathbb{K}^3$ sowie
   $$U = \langle (1,1,1), (1,2,3) \rangle, \quad U' = \langle (0,1,-1), (0,-2,2) \rangle,$$
   wobei $n := \underbrace{1 + \ldots + 1}_{n\text{-mal}}$, $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie die Dimension der Unterräume U, U', $U \cap U'$ und $U + U'$ von V. (Hinweis: Beachten Sie die Charakteristik des Körpers $\mathbb{K}$, welches die kleinste natürliche Zahl n ist mit $n = 0$ [Falls keine solche natürliche Zahl existiert wird $n = 0$ gesetzt].)
4. (4 Punkte) Welche der folgenden Abbildungen ist linear?
   a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $f(x) = (2x, 5x)$,
   b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + c$, $c \in \mathbb{R}$,
   c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = xy$,
   d) $f : \mathbb{R} \to \mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$, $f(x) = xE_n$, E_n Einheitsmatrix von $\mathrm{Mat}_n(\mathbb{R})$.

Abgabe: Freitag, 15.06.2012, 9 Uhr in der Vorlesung