Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

SS 2012
15.06.2012
Blatt 8

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte) Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die Drehung um 90° in positiver Richtung, $\mathcal{K} = (e_1, e_2)$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^2$ und $\mathcal{A} = (v_1, v_2)$ die Basis mit $v_1 = e_1$ und $v_2 = (1, 1)$. Bestimmen Sie die Matrizen $M(f; \mathcal{K}, \mathcal{K})$, $M(f; \mathcal{K}, \mathcal{A})$ und $M(f; \mathcal{A}, \mathcal{A})$.

2. (4 Punkte) Sei $V = \mathbb{K}[X]^{(4)}$ und $W = \mathbb{K}[X]^{(2)}$ sowie $D^2 : V \to W$, $D^2(p) = p''$ und $\mathcal{K}_n = (1, X, \ldots, X^n)$ die kanonische Basis von $\mathbb{K}[X]^{(n)}$. Berechnen Sie die Matrix von D^2 bzgl. der Basen $\mathcal{K}_4$ und $\mathcal{K}_2$.

3. (4 Punkte) Seien V, W und U Vektorräume und $f : V \to W$ sowie $g : W \to U$ linear.

   a) Zeigen Sie, dass $g \circ f : V \to U$ linear ist.

   b) Sei $\ker f := \{v \in V,\ f(v) = \mathbf{0}\}$. Zeigen Sie, dass $\ker f$ ein Unterraum von V ist.

   c) Sei $\operatorname{Im} f := \{w \in W,\ \exists v \in V :\ w = f(v)\}$. Zeigen Sie, dass $\operatorname{Im} f$ ein Unterraum von W ist.

   d) Sei f bijektiv. Zeigen Sie, dass f^{-1} linear ist.

4. (4 Punkte) Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum endlicher Dimension und $V^* := \operatorname{Hom}(V, \mathbb{K})$ sein sogenannter Dualraum. Ist $\mathcal{A} = (v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V, so definiert man für jedes $1 \leq i \leq n$ eine lineare Abbildung $f_i : V \to \mathbb{K}$ durch $f_i(v_j) = \delta_{ij}$ für alle $1 \leq j \leq n$. Zeigen Sie, dass $(f_1, \ldots, f_n)$ eine Basis von V^* ist. (Sie heißt die zu $\mathcal{A}$ duale Basis.)

Abgabe: Freitag, 22.06.2012, 9 Uhr in der Vorlesung