Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

SS 2012
27.04.2012
Blatt 2

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2"

1. (4 Punkte) (Integralkriterium)

   a) Sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}_+$ eine monoton fallende Funktion (und damit $f|[1, n]$ integrierbar, für alle $n \in \mathbb{N}$) und sei $a_n := f(n)$. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ genau dann konvergiert, wenn das uneigentliche Integral $\int\limits_1^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \lim\limits_{x\to\infty} \int\limits_1^{x} f(y)\mathrm{d}y$ existiert. (Hinweis: $f(n) \geq \int\limits_n^{n+1} f(x)\mathrm{d}x \geq f(n+1)$.)

   b) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha \in (1, \infty)$ konvergiert, für $\alpha \in (-\infty, 1]$ aber divergiert.

2. (4 Punkte) Benutzen Sie Majoranten-, Quotienten- und Integralkriterium, um folgende Reihen auf Konvergenz zu untersuchen:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 \ln n}, \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2(n)}.$$

3. (4 Punkte) (Cauchy-Produkt von Reihen, vgl. Forster §8)

   a) Zeigen Sie: Sind $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen und ist $c_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$, so konvergiert auch ihr Cauchy-Produkt $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut und es gilt:
$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$
   (Hinweis: Betrachten Sie $C_n^* := \left(\sum\limits_{k=0}^{n} a_k\right)\left(\sum\limits_{k=0}^{n} b_k\right)$ und zeigen Sie $\lim\limits_{n\to\infty} C_n^* = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_n$.)

   b) Zeigen Sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:
$$e^{z+w} = e^z e^w.$$

4. (4 Punkte) (Leibniz-Kriterium, vgl. Forster §7)

   a) Sei $a_n \in [0, \infty)$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$ konvergiert. (Hinweis: Für die Partialsummen $s_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k a_k$, $n \in \mathbb{N}$, gilt: (i) $s_{2n+2} \leq s_{2n}$, (ii) $s_{2n+3} \geq s_{2n+1}$, (iii) $s_{2n+1} \leq s_{2n}$.)

b) Zeigen Sie die Konvergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}$.

Abgabe: Freitag, 04.05.2012, 9 Uhr in der Vorlesung