Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2012

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

11.04.2012
Blatt 4

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

1. (4 Punkte) Sei $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ die komplexe Exponentialfunktion.

   a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt, dass
   $$\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i}\sin y)$$
   ist und damit: Für $z, w \in \mathbb{C}$ ist $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^w$, genau dann wenn es ein $k \in \mathbb{Z}$ gibt mit $w = z + 2\pi\mathrm{i}k$.

   b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass exp jeden Steifen
   $$S_a := \{z \in \mathbb{C};\ a \leq \mathrm{Im}(z) < a + 2\pi\}$$
   bijektiv auf $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ abbildet. Warum ist die Umkehrung $\exp^{-1} : \mathbb{C}^* \to S_a$ nicht stetig?

   c) Sei $\ln : B_1(1) \to \mathbb{C}$ der komplexe Logarithmus aus der Vorlesung. Zeigen Sie, dass ln ein Rechtsinverses von exp ist, d.h.: $\exp \circ \ln(z) = z$, für alle $z \in B_1$.

   d) Sei $g : B_1(1) \to \mathbb{C}$ ein weiteres stetiges Rechtsinverses von exp. Zeigen Sie, dass ein $k \in \mathbb{Z}$ existiert mit: $g(z) = \ln z + 2\mathrm{i}k\pi$ für alle $z \in B_1(1)$.

2. (4 Punkte) Seien $\cosh, \sinh : \mathbb{C} \to \infty$ die komplexen hyperbolischen Funktionen,
   $$\cosh z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}\right), \quad \sinh z = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}\right).$$

   a) Bestimmen sie die Taylorreihen von cosh und sinh im Nullpunkt und zeigen Sie
   $$\cosh z = \mathrm{T}_{\cosh,0}(z), \qquad \sinh = \mathrm{T}_{\sinh,0}(z)$$
   für alle $z \in \mathbb{C}$.

   b) Zeigen Sie für alle $z \in \mathbb{C}$:
   $$\cosh'(z) = \sinh(z), \quad \sinh'(z) = \cosh(z).$$

3. (4 Punkte) Zeigen Sie die folgenden Funktionalgleichungen für alle $w, z \in \mathbb{C}$:

   a)
   $$\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$
   $$\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$$

   b)
   $$\cosh(z + w) = \cosh(z)\cosh(w) + \sinh(z)\sinh(w)$$
   $$\sinh(z + w) = \sinh(z)\cosh(w) + \cosh(z)\sinh(w).$$

4. (4 Punkte) (Identitätssatz für reell-analytische Funktionen). Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $x_0 \in I$ und seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ reell-analytisch mit $f^{(n)}(x_0) = g^{(n)}(x_0)$, für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass dann $f = g$ ist. (Hinweis: Betrachten Sie $c := \sup \{x \in I;\ f|[x_0, x] = g|[x_0, x]\}$.)

Abgabe: Freitag, 18.05.2012, 9 Uhr in der Vorlesung