Mathematisches Institut
der Universität Tübingen

SS 2012
04.05.2012
Blatt 3

Prof. Dr. Frank Loose,
Dr. Sebastian Egger

Übungen zu „Mathematik für Physiker 2“

3. (4 Punkte)

   a) Berechnen sie Real- und Imaginärteil von $\cos(z)$ und $\sin(z)$ für $z = x + \mathrm{i}y$ und zeigen Sie, dass $z \to \sin z$ und $z \to \cos z$ keine weiteren Nullstellen hat als die bekannten auf der reellen Achse.

   b) Wir definieren den komplexen Tangens und Cotangens als
   $$\tan : \mathbb{C} \setminus \left\{ z = \left(k + \frac{1}{2}\right)\pi \in \mathbb{C};\ k \in \mathbb{Z} \right\} \to \mathbb{C}, \quad \tan z := \frac{\sin z}{\cos z},$$
   $$\cot : \mathbb{C} \setminus \{ z = k\pi;\ k \in \mathbb{Z} \} \to \mathbb{C}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$
   Zeigen sie für alle z aus den jeweiligen Definitionsbereichen:
   $$\tan z = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 1}, \quad \cot z = \mathrm{i} \frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1}.$$

2. (4 Punkte) Definieren Sie in naheliegender Weise auch die hyperbolischen Funktionen cosh und sinh auf ganz $\mathbb{C}$ und leiten sie eine Beziehung zum komplexen cos und sin her.

3. (4 Punkte) Sei $P = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \in [0, \infty)$.

   a) Sei $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt ist.

   b) Sei $R' \in [0, \infty]$ der Konvergenzradius der formalen Ableitung P' von P. Zeigen Sie: $R = R'$. (Hinweis: Ist $|z| > R$, so ist auch $(n a_n z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ unbeschränkt.)

4. (4 Punkte)

   a) (Abelsche partielle Summation) Sei $a_k, b_k \in \mathbb{C}$ für $k \in \mathbb{N}$ und $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_n$. Beweisen Sie für $m \geq l \geq 1$ gilt:
   $$\sum_{k=l}^{m} a_k b_k = \sum_{k=l}^{m} A_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + A_m b_{m+1} - A_{l-1} b_l, \quad A_0 := 0.$$
   (Hinweis: $a_k = A_k - A_{k-1}$ für $k \in \mathbb{N}$.)

   b) (Kriterium von Dirichlet) Sei $a_k \in \mathbb{C}$, $b_k \in \mathbb{R}$ für $k \in \mathbb{N}$, $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge und sei $|A_n|$ beschränkt für $n \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie, dass $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ existiert.

c) Zeigen Sie, dass $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} z^n$ für alle $z \in \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1,\ z \neq 1\}$ konvergiert.

Abgabe: Freitag, 11.05.2012, 9 Uhr in der Vorlesung