SS 13 - Fachdidaktik I - Übungsblatt 5 vom 29.05.13 - Abgabe am 5.06.13

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die reellen Nullstellen der folgenden schulüblichen ganzrationalen Funktionen.
Geben Sie zu den Funktionen j, k, l und o Schlagworte zum technischen Vorgehen an.

$f(x) = x^3 - 1$ $\quad$ $g(x) = x^3 + 1$ $\quad$ $h(x) = x^4 + 1$ $\quad$ $i(x) = x^4 - 1$
$j(x) = x^3 - 2x^2 + 5x$ $\quad$ $k(x) = (2x^2 + 2x - 12) \cdot (x-5)$ $\quad$ $l(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
$m(x) = (x-2)^4 - 1$ $\quad$ $n(x) = x^6 + 7x^3 - 8$ $\quad$ $o(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Bestimmen Sie zu den Polynomen f, h und j aus Aufgabe 1 die zusätzlichen komplexen Nullstellen.

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Zum Erraten einer Nullstelle eines Polynoms nützt manchmal der Satz:
Sei $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten a_i. Dann gilt:
Für jede <u>rationale</u> Nullstelle $x_0 = \frac{p}{q}$ (p aus Z; q aus N) des Polynoms ist p ein Teiler von a_0 und q ein Teiler von a_n, sofern der Bruch $\frac{p}{q}$ durchgekürzt ist.

a) Formulieren Sie den Satz für den Spezialfall, dass das Polynom nur ganzzahlige Koeffizienten hat und $a_n = 1$ ist.
Wenden Sie diesen Satz auf die folgenden Polynome dahingehend an, ob mit seiner Hilfe eine Nullstelle gefunden werden kann: $f(x) = x^3 + 2x^2 + 3x + 2$; $g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x + 2$
b) Bestimmen Sie eine Nullstelle des Polynoms $h(x) = x^3 - 10{,}5x^2 + 30x - 12{,}5$.
c) Beweisen Sie den Satz.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Die Definition einer zweifachen Nullstelle für ein Polynom p lautet:
Definition: a heißt zweifache Nullstelle von p , wenn gilt:
Es gibt ein Polynom g mit $p(x) = (x-a)^2 \cdot g(x)$ und $g(a) \neq 0$.
Beweisen Sie den **Satz**:
a ist genau dann zweifache Nullstelle von p, wenn für die Polynomfunktion $p(a) = p'(a) = 0$ und $p''(a) \neq 0$ gilt.
Hinweis: Es ist vorausgesetzt, dass Polynomfunktionen beliebig oft differenzierbar sind.
Verwenden Sie die Ableitungsregeln.